Foglio 5 (Analisi Vettoriale per Fisica a.a. 2015/16)

proff. F. Lanzara, A. Dall'Aglio, E. Montefusco

31 ottobre 2015

Stabilire il carattere dei seguenti integrali impropri:

5.1 Esercizio

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt{x}}\,dx$$

5.2 Esercizio

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

5.3 Esercizio

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}\log x}$$

5.4 Esercizio

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^8}}$$

5.5 Esercizio

$$\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{1+\sqrt[4]{1-x^5}}$$

5.6 Esercizio

$$\int_0^1 \frac{2-\sqrt{x}-2\cos x}{x}\,dx$$

5.7 Esercizio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-3}{x^2-\log x}\,dx$$

5.8 Esercizio

$$\int_{-\infty}^1 \left(e^{1/\sqrt[3]{x}}-1\right)dx$$

5.9 Esercizio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\log\frac{x+1}{x-1}\,dx$$

5.10 Esercizio

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+e^{-x})\sqrt{x^3(x+1)}}{x^2(1+x\sqrt{x})+1-\cos x}\,dx$$

5.11 Esercizio

$$\int_3^{+\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-2}\right)^{\alpha} dx, \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

5.12 Esercizio

$$\int_0^{+\infty} (\ln(e^x+2)-x)\,dx$$

5.13 Esercizio

$$\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\cos x}{\sqrt{27x^3-1}}\,dx$$

5.14 Esercizio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\tan^6\frac{1}{x}}{\log(x^4+3)-4\log x}\,dx$$

5.15 Esercizio

Calcolare il seguente integrale improprio: $\int_0^1 \ln\frac{20x}{2x^2+3}\,dx$

5.16 Esercizio

Calcolare l'area della regione di piano compresa tra il semipiano $x \geq 1$, il grafico della funzione $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ e il suo asintoto obliquo.

5.17 Esercizio

Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale improprio

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x-2)^6} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\right)^{\alpha} dx\,,$$

e successivamente calcolarlo per $\alpha = 0$.

5.18 Esercizio

Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge ciascuno degli integrali impropri

$$\int_3^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x-2)^{\alpha}}\, dx, \quad \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\alpha}}\, dx, \quad \int_1^3 \frac{\operatorname{arctg} x}{|x-2|^{\alpha}}\, dx,$$

e calcolare il primo per $\alpha = 2$.

5.19 Esercizio

Dire per quali $\alpha > 0$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{(x^{\alpha}+\alpha)^2}\, dx\,,$$

e calcolarlo per $\alpha = 1$.

5.20 Esercizio

Dire per quali $\alpha \geq 9$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-6x+\alpha)\,(x+1)}\,,$$

e calcolarlo per $\alpha = 13$.

5.21 Esercizio

Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\big(\ln(2x+3)\big)^{\alpha}}{(x+3)^3}\, dx\,,$$

e calcolarlo per $\alpha = 1$.

5.22 Esercizio

Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x^{\alpha}}\, dx\,,$$

e calcolarlo per $\alpha = \frac{3}{2}$.

5.23 Esercizio

Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^2 |\operatorname{cotg} x|^{\alpha} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+3x^2} - \frac{1}{x}\right) dx\,,$$

e calcolarlo per $\alpha = 0$.

5.24 Esercizio (*)

Dimostrare a priori che l'area della regione compresa tra il grafico della funzione $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ e i suoi asintoti obliqui è finita, e successivamente calcolarla.
(Suggerimento: può far comodo l'identità - da provare:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

per ogni $x > 0$)