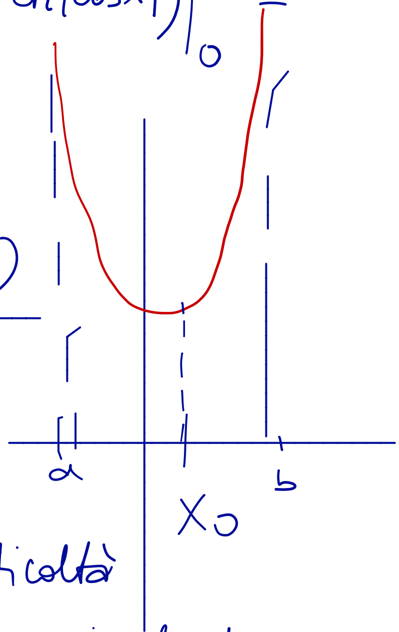
INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx = \lim_{\omega \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^{\omega} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = \lim_{\omega \to \frac{\pi}{2}^-} \left(-\ln|\cos x| \right) \Big|_0^{\omega} =$$

$$= \lim_{\omega \to \frac{\pi}{2}^-} \left(-\ln|\cos \omega| \right) = +\infty$$

Integrali impropri in un intervallo (a, b)



siamo nella situazione in cui la funzione integranda è illimitata vicino a entrambi gli estremi dell'intervallo, oppure gli estremi sono $\pm\infty$, o una combinazione di queste difficoltà

Si fissa arbitrariamente un pto $x_0 \in (a, b)$ e si studiano separatamente i due integrali impropri

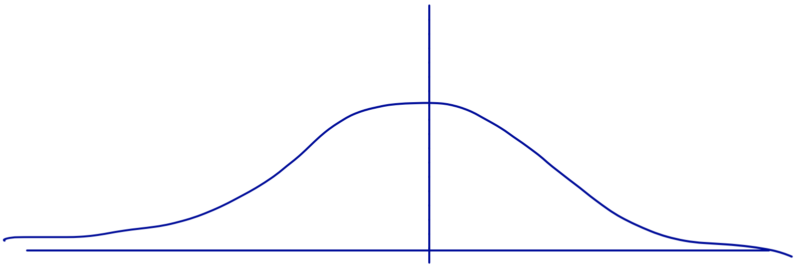
$$\int_a^{x_0} f(x)\,dx \quad e \quad \int_{x_0}^{b} f(x)\,dx$$

Se entrambi gli integrali convergono, allora poniamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx$$

e osserviamo che il risultato <u>non</u> dipende dalla scelta di x_0.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$. Fisso $x_0 = 0$



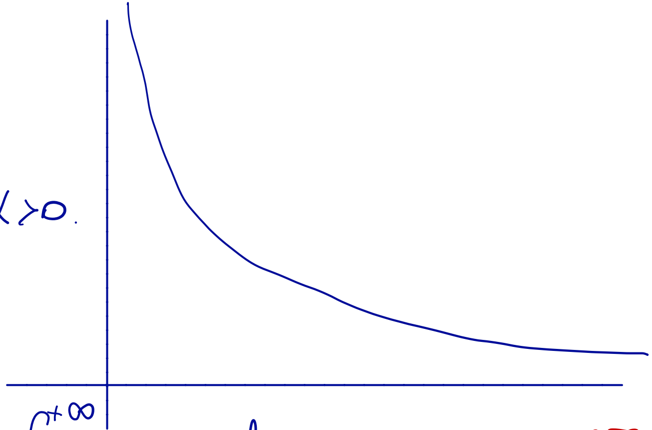
$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}}_{\shortparallel} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}}_{= \frac{\pi}{2}} = \pi$$

$$\lim_{\omega \to -\infty} \int_{\omega}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\omega \to -\infty} \left(-\operatorname{arctg} \omega\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \qquad \alpha>0$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{\int_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}}_{\text{converge sse } \alpha<1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}}_{\text{converge sse } \alpha>1} = +\infty \quad \forall \alpha>0.$$

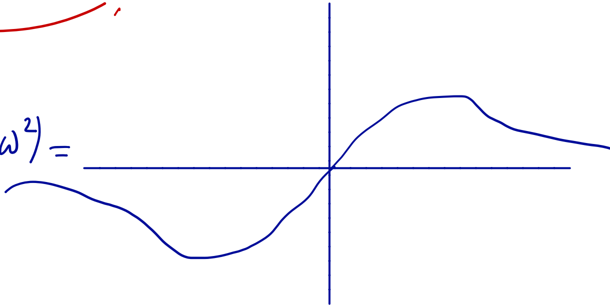


$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx}_{=-\infty} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx}$$

non converge

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \int_0^{\omega} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(1+\omega^2) =$$

$$= +\infty$$

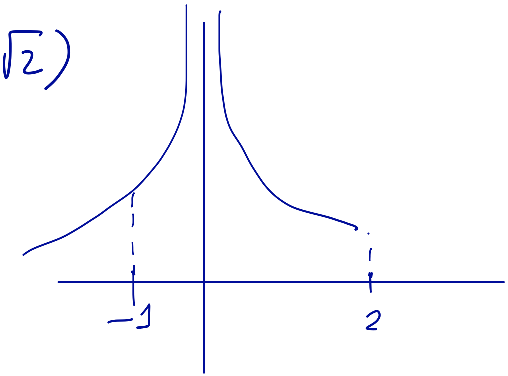


$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} 0 = 0$$

errato!

Questo procedimento E' corretto per $f(x) \geq 0$

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{-x}}}_{1} + \underbrace{\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x}}}_{2} = 2\left(1+\sqrt{2}\right)$$



$$1 = \lim_{\omega \to 0^-} \int_{-1}^{\omega} \frac{dx}{\sqrt{-x}} = \lim_{\omega \to 0^-} \int_{-\omega}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$-x = t$

$dx = -dt$

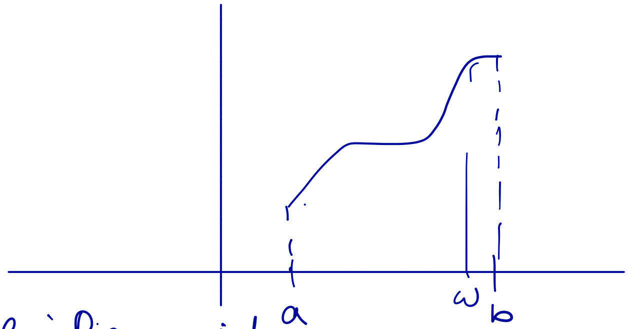
$$= \lim_{\omega \to 0^+} 2\sqrt{t}\,\Big|_{\omega}^{1} = 2(1) = 2$$

$$2 = \lim_{\omega \to 0^+} \int_{\omega}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\omega \to 0^+} 2\left(\sqrt{2} - \sqrt{\omega}\right) = 2\sqrt{2}$$

<u>OSS</u> Un integrale di Riemann è anche un integrale improprio

Cioè: se $f(x)$ è Riemann-integrabile in $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\omega \to b^-} \int_a^\omega f(x)\,dx$$



Infatti

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^\omega f(x)\,dx \right| =$$

$|f(x)| \leq M$ perché f è Riemann-int.

$$= \left| \int_\omega^b f(x)\,dx \right| \leq \int_\omega^b |f(x)|\,dx \leq M\,(b-\omega) \xrightarrow[\omega \to b^-]{} 0$$

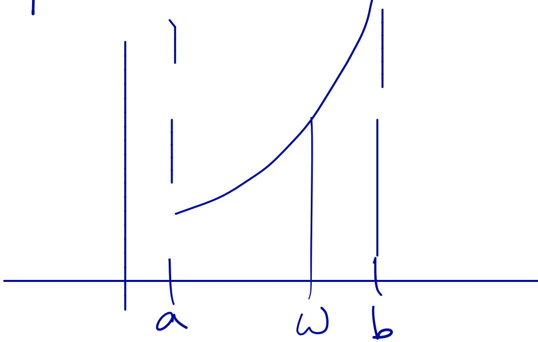
Integrali impropri di funzioni ≥ 0. $\boxed{b \leq +\infty}$

$f : [a,b) \longrightarrow [0,+\infty)$ Riemann-integrabile in $[a,\omega]$ $\forall \omega \in (a,b)$

OSS. il limite esiste sempre, finito o no.

~~se quest'ultimo limite esiste~~

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\omega \to b^-} \int_a^\omega f(x)\,dx$$



$\varphi(\omega) = \int_a^\omega f(x)\,dx$ è non decrescente

Gli integrali impropri di funzioni ≥ 0 possono solo convergere o divergere.

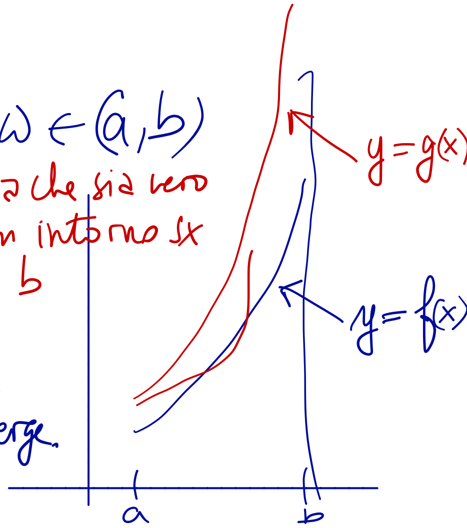
OSS L'integrale converge se e solo se $\varphi(\omega)$ è limitata superiormente

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO)

Siano $f(x), g(x) : [a,b) \to \mathbb{R}$ t.c.

1) f, g Riemann-Integrabili in $[a,w]$ $\forall w \in (a,b)$

2) $0 \le f(x) \le g(x)$ $\quad \forall x \in [a,b)$ basta che sia vero in un intorno sx di b



Allora

i) Se $\int_a^b g(x)dx$ converge, anche $\int_a^b f(x)dx$ converge.

ii) se $\int_a^b f(x)dx$ diverge, anche $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge.

OSS Nel caso i) $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Dim i) (ii) è ovvia, dopo)

$$\varphi(w) = \int_a^w f(x)dx, \qquad \psi(w) = \int_a^w g(x)dx$$

$\int g$ converge

$$\varphi(w) \le \psi(w) \le M \implies \varphi(w) \text{ limitata sup} \implies \int_a^b f(x)dx \text{ converge.}$$

$$\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^3+3x^2+6}$$ converge o diverge?

Converge, perché $\frac{1}{x^3+3x^2+6} < \frac{1}{x^3} \quad \forall x \in [5,+\infty)$

e $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+3x^2+6}$$ si procede allo stesso modo, ma si osserva

che $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ converge $\Longrightarrow \int_{\cancel{1}\ 0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+3x^2+6}$ converge

$$(*)\int_5^{+\infty}\frac{dx}{x-\sqrt{x}}$$ $\underline{\text{oss}}$ $$\frac{1}{x-\sqrt{x}} \geq \frac{1}{x} \qquad \forall x>1$$

$$\int_5^{+\infty}\frac{dx}{x}\ \text{diverge} \Rightarrow (*)\ \text{diverge.}$$

$\forall x \geq 1 \quad (\sqrt{x} \leq x)$

$$(**)\int_5^{+\infty}\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$$ $\underline{\text{OSS}}$ $$\frac{1}{x+\sqrt{x}} \geq \frac{1}{x+x} = \frac{1}{2x}$$

$$\int_5^{+\infty}\frac{dx}{2x}\ \text{diverge} \Rightarrow (**)\ \text{diverge}$$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $f, g : [a,b) \longrightarrow (0,+\infty)$, Riemann-integrabili in $[a,\omega]$ $\forall \omega \in (a,b)$ t.c.

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

1) Se $\lambda \in (0,+\infty)$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere (entrambi convergenti o entrambi divergenti)

2) se $\lambda = 0$, allora se $\int_a^b g$ converge, anche $\int_a^b f$ converge

$\Downarrow$ quindi

se $\int_a^b f$ diverge, anche $\int_a^b g$ diverge

non posso dire nulla se $\int_a^b g$ diverge

3) se $\lambda = +\infty$

come 2), ma a ruoli di f e g scambiati

<u>DIM</u> Se $\lambda \in (0,+\infty)$, e $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x\to b^-} \lambda$, prendendo $\varepsilon = \frac{\lambda}{2} > 0$ nella def. di limite, troverei in un intorno sx di b, in cui $\underbrace{\lambda-\varepsilon}_{\substack{\parallel \\ 0<\frac{\lambda}{2}}} < \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda+\varepsilon = \frac{3}{2}\lambda$

$\Rightarrow$ In tale intorno sx, si ha $\frac{\lambda}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2}\lambda g(x)$

Quindi, se $\int_a^b g$ converge $\Rightarrow \int_a^b \frac{3}{2}\lambda g$ converge $\underset{\text{confronto}}{\Longrightarrow} \int_a^b f$ converge

se $\int_a^b g$ diverge $\Rightarrow \int_a^b \frac{\lambda}{2} g$ diverge $\underset{\text{confronto}}{\Longrightarrow} \int_a^b f$ diverge

dim 2) se $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \to b^-} 0^+ \Rightarrow \exists$ un intorno sx di b in cui

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 1 \Rightarrow f(x) < g(x)$$

si conclude con il confronto.

dim 3) osservare che 3) $\Rightarrow \lim_{x \to b^-} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow$ si applica 2).

$$(*) = \int_0^{+\infty} \frac{5x^2 - \operatorname{sen} x}{4x+5+x^{5/2}}\,dx$$ Pb solo per $x \to +\infty$

$$\frac{5x^2 - \operatorname{sen} x}{4x+5+x^{5/2}} \sim \frac{5x^2}{x^{5/2}} = \frac{5}{\sqrt{x}}$$ per $x \to +\infty$

In altre parole $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{5x^2 - \operatorname{sen} x}{4x+5+x^{5/2}}}{\left(5/\sqrt{x}\right)} = 1$

$\int_1^{+\infty} \frac{5}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge

perché $\sqrt{x} = x^{1/2}$; $1/2 < 1$

$\Rightarrow (*)$ diverge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{5x^2 - \operatorname{sen} x}{4x+5+x^{\cancel{5/2}\ 7/2}}\,dx$$ $f(x) \sim \frac{5}{x^{3/2}}$

converge!

Esercizio

$$\int_{-\infty}^{5} \underbrace{\frac{3x^4}{5+x^2 e^{|x|}}}_{f(x)} \qquad \text{Pb solo per } x \to -\infty$$

per $x \to -\infty$

$$f(x) \sim \frac{3x^4}{x^2 e^{-x}} = \frac{3x^2}{e^{-x}}$$

confronto con $\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{e^{-x}} \Big/ \left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4}{e^{-x}} \underset{-x=t}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{3t^4}{e^t} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} \text{ converge } \underset{\text{c.a.}}{\Longrightarrow} \int_{-\infty}^{5} f(x)\,dx \text{ converge.}$$