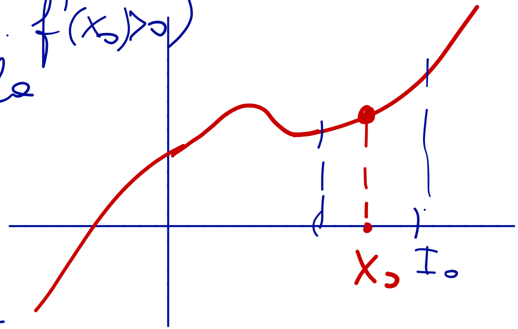
TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE

1ª) dim 1

Sia $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(I)$, I intervallo aperto.
Se $x_0 \in I$ è t.c. $f'(x_0) \neq 0$ (per es. $f'(x_0) > 0$)
allora $\exists$ un intorno di x_0 in cui la
f è strett. crescente $\Rightarrow$ invertibile



$\exists\, I_0$ intorno di x_0 t.c.
$f\big|_{I_0} : I_0 \longrightarrow f(I_0)$ è invertibile

e inoltre f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ (in realtà in ogni $y \in J = f(I_0)$)

e $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

La prossima volta cercheremo di generalizzare questo discorso a funzioni $f: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

TEOREMA A aperto di $\mathbb{R}^N$, $\underline{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^N$. $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots f_N(\underline{x}))$

$\underline{f} \in C^1(A; \mathbb{R}^N)$

Sia $\underline{x}_0 \in A$ t.c.

$$\det \frac{\partial(f_1, \dots f_N)}{\partial(x_1, \dots x_N)}(\underline{x}_0) \neq 0.$$ Allora $\exists$ intorno I di $\underline{x}_0$

t.c. $\underline{f}\big|_I$ è invertibile, $\underline{f}(I) = J$ è aperto e

$\underline{f}^{-1} : J \longrightarrow I$ è di classe C^1 (a valori in $\mathbb{R}^N$)

e $\forall\, \underline{y} \in J$ si ha

$$\frac{\partial((f^{-1})_1, (f^{-1})_2, \dots (f^{-1})_N)}{\partial(y_1, \dots y_N)}(\underline{y}) = \left[\frac{\partial(f_1, \dots f_N)}{\partial(x_1, \dots x_N)}(\underline{f}^{-1}(\underline{y}))\right]^{-1}$$

DIM. (tramite Dini)

$F(\underline{x}, \underline{y}) = f(\underline{x}) - \underline{y} : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}^N$

(localmente!)

Voglio esplicitare l'eq. $F(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$ nella forma $\underline{x} = \varphi(\underline{y})$

$\underline{y} = f(\underline{x})$

(questo vuol dire $\varphi = f^{-1}$)

La condizione per fare questo è che 1) $f(\underline{x}_0) = \underline{y}_0$

2) $\det \dfrac{\partial(F_1, \dots F_N)}{\partial(x_1, \dots x_N)}(\underline{x}_0) \neq 0$

$\quad \Vert$

$\det \dfrac{\partial(f_1, \dots f_N)}{\partial(x_1, \dots x_N)}(\underline{x}_0)$

Quindi il teorema di Dini assicura che, localmente, posso scrivere $\underline{F(x,y)=0}$ nella forma $\underline{x=\varphi(y)}$.

Quindi $\underline{\varphi} = \underline{f^{-1}}$

$$\frac{\partial\left((f^{-1})_1,(f^{-1})_2,\dots,(f^{-1})_N\right)}{\partial(\cancel{x_1},\dots,\cancel{x_N})\atop (y_1\dots y_N)}(y) = -\left[\frac{\partial(F_1\dots F_N)}{\partial(x_1\dots x_N)}(\varphi(y),y)\right]^{-1}\frac{\partial(F_1\dots F_N)}{\partial(y_1\dots y_N)}(\varphi(y),y)$$

$$= \left[\frac{\partial(f_1,\dots,f_N)}{\partial(x_1\dots x_N)}(\varphi(y))\right]^{-1}(-I) =$$

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} = \begin{cases} -1 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}\right.$$

$$= \left[\frac{\partial(f_1,\dots,f_N)}{\partial(x_1\dots x_N)}(\varphi(y))\right]^{-1}$$

ESERCIZIO

Considerare la trasformazione

$$x = e^u \cos v$$
$$y = e^u \operatorname{sen} v$$

e mostrare che è invertibile in un intorno di ogni punto $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Calcolare le derivate parziali della funzione inversa nel punto corrispondente a $(u_0, v_0) = (1, \frac{\pi}{6})$.
Osservare che la trasformazione non è <u>globalmente</u> invertibile.

$$\underline{f} : (u, v) \longmapsto (e^u \cos v, e^u \operatorname{sen} v) \qquad \begin{cases} f_1(u,v) = e^u \cos v \\ f_2(u,v) = e^u \operatorname{sen} v \end{cases}$$
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u,v)}(u,v) = \begin{bmatrix} e^u \cos v & -e^u \operatorname{sen} v \\ e^u \operatorname{sen} v & e^u \cos v \end{bmatrix} \Rightarrow \det \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u,v)} = e^{2u} \neq 0 \quad \forall (u,v)$$

$\Longrightarrow$ f è localmente invertibile vicino a ogni punto.

$f^{-1}: J \longrightarrow I$ dove I è un intorno di (u_0, v_0)

è di classe C^1, J è un aperto cont. $\underline{f}(u_0, v_0)$

$$(u_0, v_0) = \left(1, \frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow \underline{f}(u_0, v_0) = \left(\frac{e\sqrt{3}}{2}, \frac{e}{2}\right)$$

$$u = (f^{-1})_1(x,y) = u(x,y)$$
$$v = (f^{-1})_2(x,y) = v(x,y)$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\left(\frac{e\sqrt{3}}{2}, \frac{e}{2}\right) = \left[\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\left(1,\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{e\sqrt{3}}{2} & -\frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{e\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{e^2}\begin{bmatrix} \frac{e\sqrt{3}}{2} & \frac{e}{2} \\ -\frac{e}{2} & \frac{e\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2e} & \frac{1}{2e} \\ -\frac{1}{2e} & \frac{\sqrt{3}}{2e} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{e\sqrt{3}}{2}, \frac{e}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$$, per esempio

OSS In un intorno di $(u_0, v_0) = \left(1, \frac{\pi}{6}\right)$ la trasformazione si inverte esplicitamente!

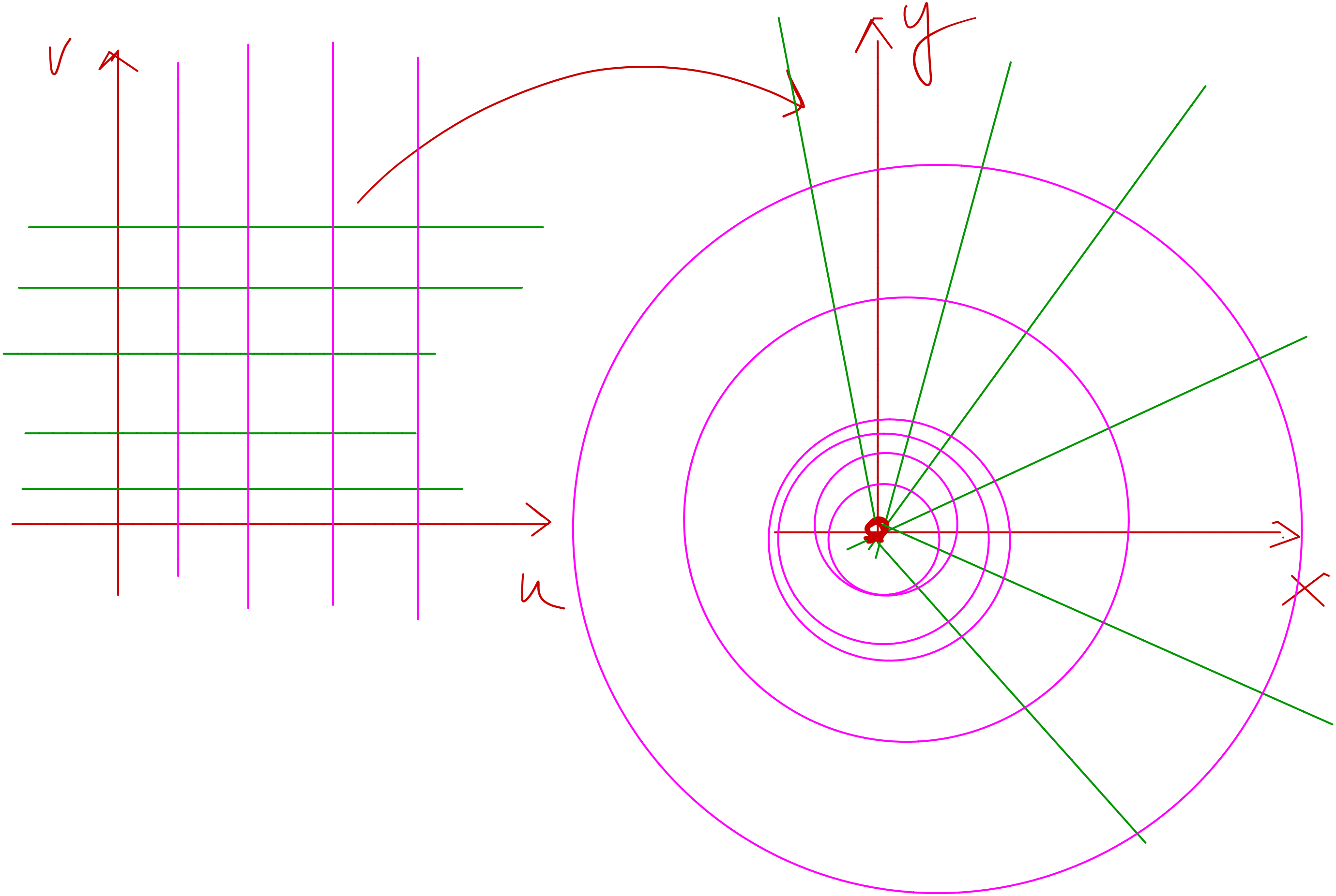
$$u = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

$$v = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{e\sqrt{3}}{2}, \frac{e}{2}\right) = -\frac{e/2}{\frac{e^2 3}{4}+\frac{e^2}{4}} = -\frac{1}{2e}$$

OSS $f(u,v)$ non è globalmente invertibile perché $f(u,v) = f(u, v+2\pi)$


v
u
y
x

Una funzione $f: I \to J$ I, J aperti di $\mathbb{R}^N$

C^1 con inversa di classe C^1

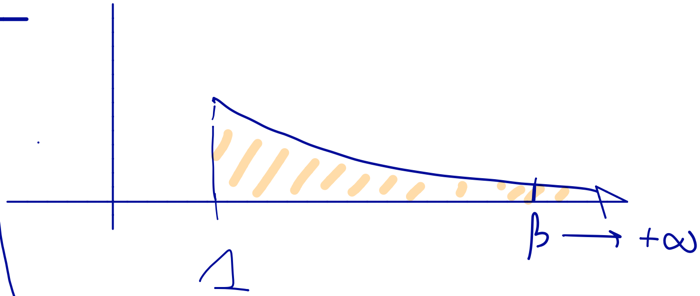
si dice diffeomorfismo.

Il teorema fatto prima fornisce una c.s. affinché una funzione C^1 sia localmente un diffeomorfismo.

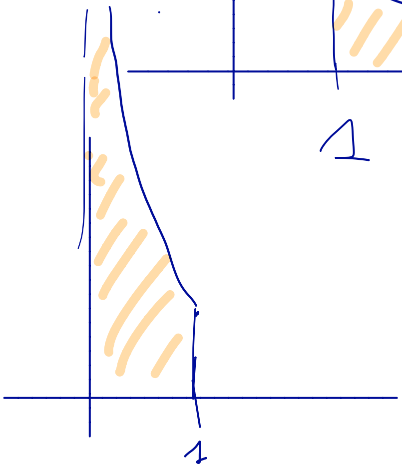
INTEGRALI IMPROPRI

Esempi:

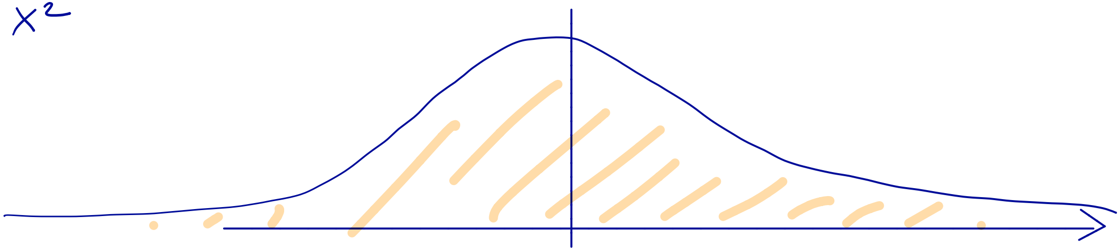
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$



$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = +\infty$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$



Sia $f:[a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $-\infty < a < b \leq +\infty$

t.c. $\forall\ \beta \in (a,b)$ f sia Riemann-integrabile in $[a,\beta]$

per es.. f continua in $[a,b) \Rightarrow f$ continua in $[a,\beta]$

- f monotona "
- f continua in $[a,b)$ eccetto un numero finito di punti

limitata in $[a,\beta]$ $\forall \beta < b$

Si definisce $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx$$ se questo limite esiste

L'integrale si dice convergente se il limite è finito.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \to +\infty} \int_1^{\beta} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \to +\infty} \left. \frac{1}{x} \right|_{x=\beta}^{x=1} = \lim_{\beta \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) = 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\beta \to +\infty} \int_1^{\beta} \frac{dx}{x} = \lim_{\beta \to +\infty} \left(\ln \beta - \cancel{\ln 1} \right) = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\beta \to +\infty} \int_1^{\beta} \frac{dx}{x^{\alpha}} \overset{\alpha \neq 1}{=} \lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left. \frac{1}{x^{\alpha - 1}} \right|_1^{\beta} = \qquad \alpha > 0$$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{\beta^{\alpha-1}} - 1 \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ converge sse $\alpha > 1$.

(ricorda la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_0^{\beta} e^{-x}\,dx = \lim_{\beta\to+\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^{\beta} =$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} \left(1 - e^{-\beta}\right) = 1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\omega\to0^+} \int_\omega^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\omega\to0^+} \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) = +\infty$$

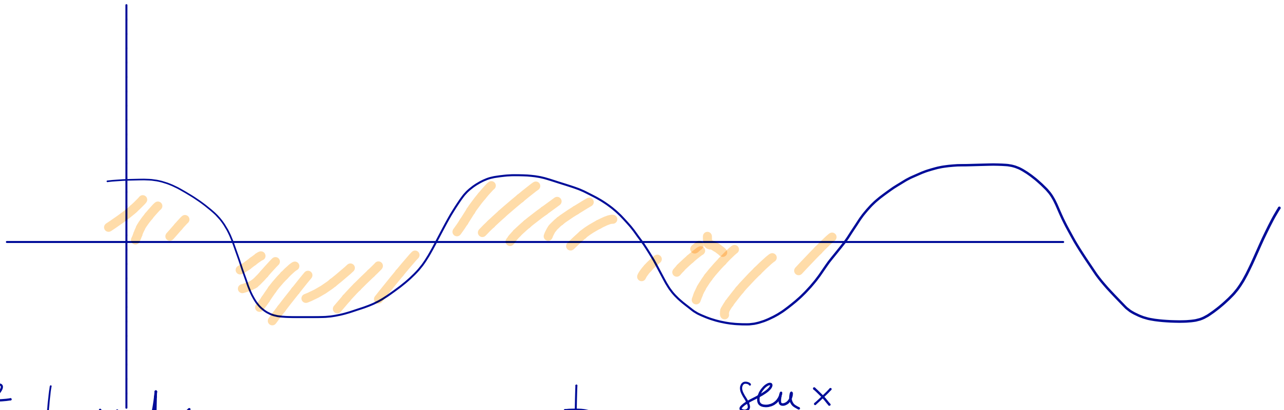
qui il pb. è nel 1° estremo

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \dots \text{esercizio!}$$

→ converge (a cosa?) se $\alpha < 1$

→ diverge se $\alpha \geq 1$

$$\int_0^{+\infty} \cos x \, dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^{\beta} \cos x \, dx = \lim_{\beta \to +\infty} \operatorname{sen} \beta \qquad \nexists$$



$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx =$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$