- **Esercizio:** Trovare le dimensioni di una scatola a forma di parallelepipedo senza coperchio che ha volume massimo se l'area della superficie della scatola è 12.

Chiamiamo x, y, z le tre dimensioni della scatola

La funzione da massimizzare è $f(x,y,z) = xyz$

Il vincolo è $\underbrace{xy + 2xz + 2yz - 12}_{G(x,y,z)} = 0$

Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla G(x,y,z) \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz = \lambda(y+2z) \\ xz = \lambda(x+2z) \\ xy = 2\lambda(x+y) \\ xy + 2xz + 2yz = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz = \lambda(y+2z) & \cdot\, x \\ xz = \lambda(x+2z) & \cdot\, y \\ xy = 2\lambda(x+y) & \cdot\, z \\ xy+2xz+2yz = 12 & \cdot \end{cases}$$

$$\begin{aligned} xyz &= \lambda x(y+2z) \\ xyz &= \lambda y(x+2z) \\ xyz &= 2\lambda z(x+y) \end{aligned} \Longrightarrow$$

$$\cancel{\lambda}(xy+2xz) = \cancel{\lambda}(yx+2yz) = \cancel{\lambda}(2xz+2yz)$$

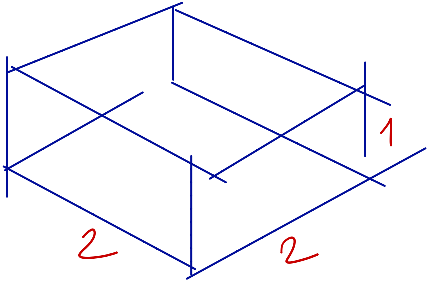
$$2xz = 2yz \Rightarrow z(x-y)=0 \Longrightarrow x=y.$$

$$yx = 2xz \;\Downarrow\; x(y-2z)=0 \;\Downarrow\; y=2z$$

$$x=y=2z \Longrightarrow 4z^2+4z^2+4z^2=12 \Rightarrow z^2=1 \Rightarrow z=1$$

4ª eq

$$x=y=2$$



Il vincolo si scrive così

$$\frac{1}{z}+\frac{2}{y}+\frac{2}{x}=12$$

Convincersi che il max assoluto esiste (non vale Weierstrass) e quindi è quello trovato.

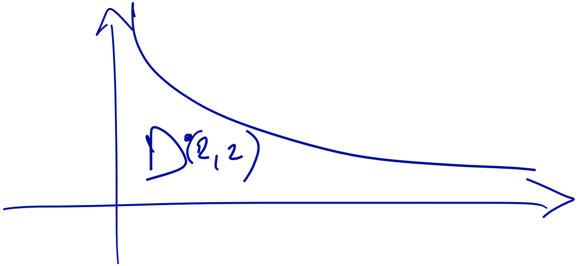
Se non volessimo usare i moltiplicatori di Lagrange dovremmo fare così:

Fissiamo $x > 0$, poi $y > 0$ t.c. $xy < 12$

$$z = \frac{12 - xy}{2(x+y)}$$

Devo massimizzare $V = \frac{xy(12 - xy)}{2(x+y)}$ in D

$$D = \{(x,y) : x > 0, y > 0, xy < 12\}$$



e si trova che il max. assoluto è assunto in $(2,2)$.

MASSIMI E MINIMI VINCOLATI IN $\mathbb{R}^3$ (oppure $\mathbb{R}^N$)

TEOREMA

Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto, siano $f, g \in C^1(A)$. Sia $E = \{(x,y,z) \in A : g(x,y,z) = 0\}$, sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in E$ pto "regolare" del vincolo E, cioè $\nabla g(P_0) \neq 0$. Allora, se P_0 è un pto di minimo (massimo) relativo di f vincolato ad E, deve esistere $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$.

In altre parole, $(x_0, y_0, z_0, \lambda) \in \mathbb{R}^4$ è soluz. del sistema

$$\begin{cases} f_x(P_0) = \lambda\, g_x(P_0) \\ f_y(P_0) = \lambda\, g_y(P_0) \\ f_z(P_0) = \lambda\, g_z(P_0) \\ g(P_0) = 0 \end{cases}$$

DIM. Supponiamo $g_z(P_0) \neq 0 \Rightarrow$ [Dini]

$\exists$ un intorno di P_0 in cui E è il grafico di una funz. $\varphi(x,y)$. In tale intorno

$$(x,y,z) \in E \iff z = \varphi(x,y)$$

Il pto (x_0,y_0) è pto di max. relativo libero per

$$\eta(x,y) := f(x,y,\varphi(x,y)) \xRightarrow{\text{(Fermat)}} \nabla\eta(x_0,y_0) = 0$$

$$0 = \eta_x(x_0,y_0) = f_x(P_0) + f_z(P_0)\underbrace{\varphi_x(x_0,y_0)}_{(\text{Dini}) \; = -\frac{g_x(P_0)}{g_y(P_0)}} = f_x(P_0) - \frac{f_z(P_0)g_x(P_0)}{g_z(P_0)}$$

$$\Rightarrow f_x(P_0) = \frac{f_z(P_0)g_x(P_0)}{g_z(P_0)}$$

Analogamente $\Rightarrow$ $$f_y(P_0) = \frac{f_z(P_0)\,g_y(P_0)}{g_z(P_0)}$$

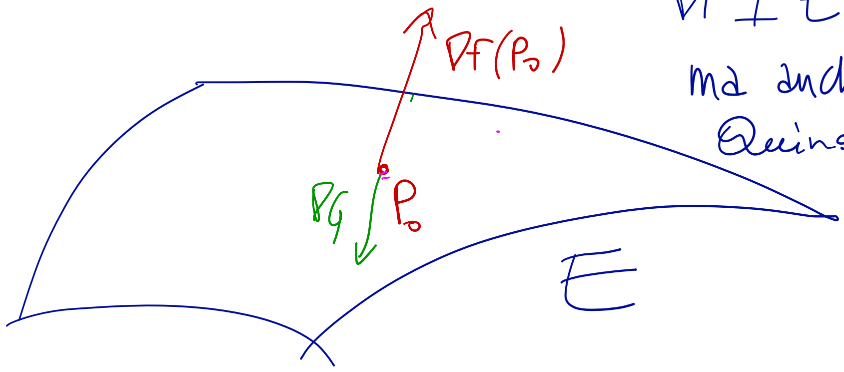
$$\nabla f(P_0) = (f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)) = \left(\frac{f_z g_x}{g_z}, \frac{f_z g_y}{g_z}, f_z\right)(P_0) =$$

$$= \underbrace{\frac{f_z}{g_z}}_{=\lambda}(g_x, g_y, g_z)(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

$\square$

$$\lambda = \frac{f_z(P_0)}{g_z(P_0)}$$

L'idea geometrica sottostante è la seguente



$\nabla f \perp E$ (cioè ortogonale al piano tg).

ma anche $\nabla g(P_0) \perp E$.

Quindi $\nabla f(P_0)$ e $\nabla g(P_0)$

sono paralleli

$\Rightarrow$ multipli l'uno dell'altro.

- **Esercizio:** Trovare il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x,y,z) = x + 3y - z$ sotto i vincoli $x^2 + y^2 - z = 0$, $z = 2x + 4y$.

<u>1° modo</u>. Parametrizzando

$E = \{(x,y,z) : z = x^2+y^2,\ z = 2x+4y\}$

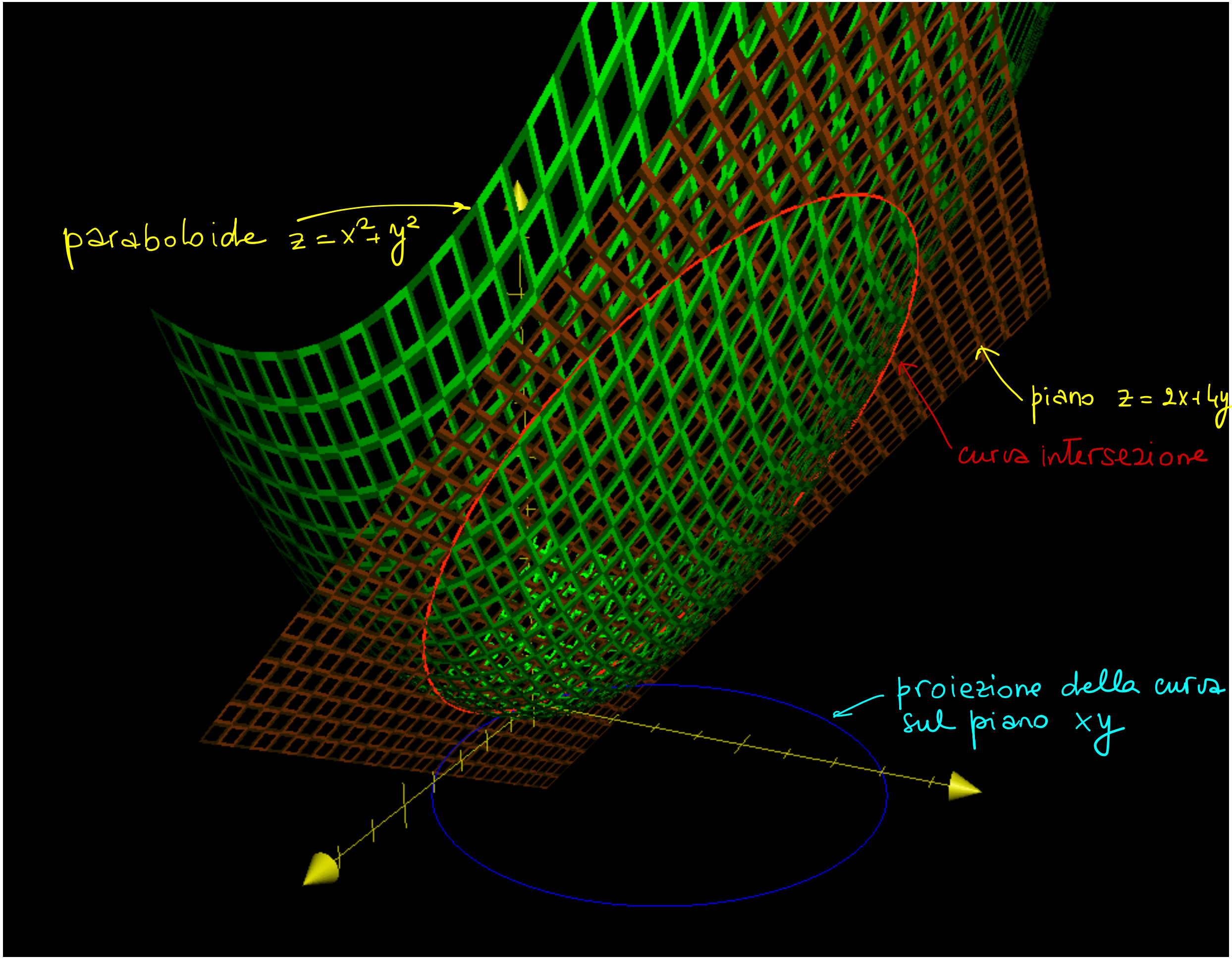
$\Rightarrow x^2+y^2 = 2x+4y \Rightarrow (x^2-2x+1)$

$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4) = 5$

$(x-1)^2+(y-2)^2 = 5$

circonferenza di centro $(1,2)$

e raggio $\sqrt{5}$


paraboloide $z = x^2 + y^2$
piano $z = 2x + 4y$
curva intersezione
proiezione della curva sul piano xy

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{5}\cos\theta \\ y = 2 + \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 10 + 2\sqrt{5}\cos\theta + 4\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Si tratta quindi di trovare gli estremi assoluti di $\varphi(\theta) = f(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) =$

$= 1 + \sqrt{5}\cos\theta + 6 + 3\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,\theta - 10 - 2\sqrt{5}\cos\theta - 4\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,\theta$

$= -3 - \sqrt{5}\cos\theta - \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,\theta$ $\Rightarrow$ da concludere facilmente

$\Rightarrow$ analisi di 1° anno.

2° modo (moltiplicatori di Lagrange)

massimizzare/minimizzare f con i due vincoli

$g(x,y,z) = z - x^2 - y^2 = 0$, $h(x,y,z) = z - 2x - 4y = 0$

$$g(x,y,z) = z - x^2 - y^2 = 0\,, \quad h(x,y,z) = z - 2x - 4y = 0$$

Si risolve il seguente sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

5 eq^{ni} in 5 incognite!

$$\begin{cases} 1 = -2\lambda x - 2\mu \\ 3 = -2\lambda y - 4\mu \\ -1 = \lambda + \mu \quad \mu = -1-\lambda \\ z = x^2 + y^2 \\ z = 2x + 4y \end{cases}$$

$\Rightarrow 1 = -2\lambda x + 2 + 2\lambda$

$\Rightarrow 3 = -2\lambda y + 4 + 4\lambda$

$\Rightarrow 2\lambda(1-x) = -1$

$2\lambda(2-y) = -1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{y-2}$

$x - 1 = y - 2$

$x = y - 1$

$x^2 + y^2 = 2x + 4y \Rightarrow x^2 + (x+1)^2 = 2x + 4x + 4$

$2x^2 - 4x - 3 = 0 \quad x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+6}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{10}}{2} \Rightarrow y = \quad z =$

OSS Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange funziona se (x_0, y_0, z_0) è pto regolare del (doppio) vincolo.

Cioè $\frac{\partial(h,g)}{\partial(x,y,z)}(x_0, y_0, z_0)$ ha rango 2

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} -2x, & -2y, & 1 \\ -2, & -4, & 1 \end{pmatrix}$$ ha rango < 2 se e solo se

$x = 1$, $y = 2$, z qualsiasi $\Rightarrow$ mai vero sul vincolo!!

OSSERVAZIONE

Il teorema di Dini è sostanzialmente una "linearizzazione"

$$f(x,y)=0 \quad \text{in un intorno di } (x_0,y_0)$$

sostituisco a f il suo piano tangente.

$$\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{f(x_0,y_0)} + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \cong 0$$

se $f_y(x_0,y_0) \neq 0 \Longrightarrow$

$$y \cancel{=} = y_0 \cancel{=} + - \frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}(x-x_0)$$

$$= \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x-x_0)$$

è il polinomio di Taylor di grado 1 della φ che troviamo con il thm. di Dini.

Idem per i sistemi:

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases} \xRightarrow{\text{Lin.}} \begin{cases} f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)+f_z(P_0)(z-z_0)=0 \\ g_x(\ )(x-x_0)+g_y \qquad +g_z \qquad =0 \end{cases}$$

sistema lineare in x, y, z. Voglio esplicitare y e z in funzione di x.

Si può fare se $\det \begin{pmatrix} f_y(P_0) & f_z(P_0) \\ g_y(P_0) & g_z(P_0) \end{pmatrix} \neq 0$.

In altre parole, il Teorema di Dini (per sistemi o equazioni) consiste nel linearizzare le equazioni e poi applicare i teoremi di algebra lineare che garantiscono la risoluzione dei sistemi lineari.

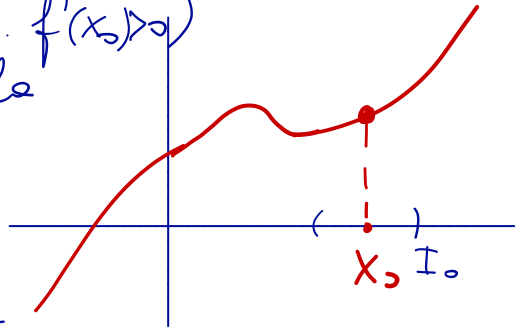
TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE

1^a) dim 1

Sia $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(I)$, I intervallo aperto.

Se $x_0 \in I$ è t.c. $f'(x_0) \neq 0$ (per es. $f'(x_0) > 0$)

allora $\exists$ un intorno di x_0 in cui la f è strett. crescente $\Rightarrow$ invertibile



$\exists I_0$ intorno di x_0 t.c.

$f\big|_{I_0} : I_0 \longrightarrow f(I_0)$ è invertibile

e inoltre f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$

e $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

La prossima volta cercheremo di generalizzare questo discorso a funzioni $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$.