Foglio 4 (Analisi Vettoriale per Fisica a.a. 2015/16)

proff. F. Lanzara, A. Dall'Aglio, E. Montefusco

24 ottobre 2015

3.1 Esercizio

Verificare che l'equazione $y = xy + \ln y$
a) definisce in un intorno di $P = (1,1)$ una funzione $y = f(x)$.
b) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(1,1)$.
c) Determinare il polinomio di Taylor di punto iniziale $x_0 = 1$ di ordine 2 della $f(x)$.

3.2 Esercizio

Sia $F(x,y) = \cos(xy) + y - \frac{2}{\pi}x$.
a) Dimostrare che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente, in un intorno del punto $P_0 = (\frac{\pi}{2}, 0)$, una funzione $x = g(y)$.
b) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $x = g(y)$ nel punto P_0.
c) Determinare il polinomio di Taylor del secondo ordine di $g(y)$ di punto iniziale $y_0 = 0$.

3.3 Esercizio

Sia $f_a(x,y) = \sin(x) + e^{x+y} + ax + y^3 + y - 1$.
a) Verificare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ in un intorno del punto $(0,0)$ l'equazione $f_a(x,y) = 0$ definisce in modo implicito la funzione $y_a(x)$ tale che $f_a[x, y(x)] = 0$.
b) Determinare a in modo tale che la funzione y_a abbia un punto di massimo relativo in 0.
c) Dimostrare che per ogni $a > 1$ la funzione y_a è decrescente in tutto il suo intervallo di definizione.

3.4 Esercizio

Sia
$$F(x,y) = e^{2y^3+y} - x - x^3 - 1.$$

a) Dimostrare che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente su tutta una semiretta $(-\gamma, \infty)$ per un $\gamma > 0$ una funzione $y = f(x)$ di classe C^∞ tale che $F(x, f(x)) = 0$.
b) Determinare il polinomio di Taylor $P(x)$ di secondo ordine e punto iniziale $x = 0$ relativo a $f(x)$ e calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}.$$

3.5 Esercizio

Sia
$$F(x,y) = y^3 + (x^2+1)y - 3x^2.$$

a) Dimostrare che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente su tutto $\mathbb{R}$ una funzione $y = g(x)$ di classe C^∞ tale che $F(x, g(x)) = 0$.
b) Calcolare le derivate $g'(1)$ e $g''(1)$.

3.6 Esercizio

Sia $F(x,y,z) = e^z + x^2y^2z - e^{xy} + x^4 - y^4$.
a) Dimostrare che l'equazione $F(x,y,z) = 0$ determina una funzione implicita $z = g(x,y)$ definita per (x,y) in un intorno dell'origine;
b) determinare il valore di $g(0,0)$;
c) riconoscere che l'origine è un punto stazionario per la $g(x,y)$;
d) riconoscere il tipo di tale punto.

3.7 Esercizio

Assegnato il sistema
$$e^y + z + x - 2 = 0;\; x^2 + y^2 + z^2 + y - 1 = 0$$

a) dimostrare che in un intorno del punto $(0,0,1)$ il sistema definisce implicitamente due funzioni $\alpha(x), \beta(x)$ tali che $(x, \alpha(x), \beta(x))$ siano soluzioni del sistema.
b) Calcolare poi $\alpha'(0), \beta'(0)$.

3.8 Esercizio

Data la funzione di due variabili

$$f(x,y)=x^2y+xy^2+y,$$

a) trovare e classificare i suoi punti critici;
b) trovare massimo e minimo assoluti di f nella regione limitata di piano delimitata dalle curve $x=2$, $y=3$, $xy=1$.

3.9 Esercizio

Data la funzione

$$f(x,y)=\frac{x}{x+y-4},$$

a) trovarne e disegnarne il dominio;
b) trovare e classificare eventuali punti critici di f;
c) trovare massimo e minimo assoluti di f nell'insieme

$$T=\{(x,y)\;:\;x^2+y^2\leq 4\};$$

d) trovare estremo superiore ed estremo inferiore di f in tutto il suo dominio.

3.10 Esercizio

Mostrare a priori che la funzione $f(x,y)=2x+4y$ ammette massimo e minimo assoluti nell'insieme E dei punti (x,y) tali che

$$x^4+y^2\leq 17,$$

e poi calcolare tali valori di massimo e minimo.

3.11 Esercizio

Trovare e classificare i punti critici di

$$f(x,y)=x^3-x^2+y^4-32y^2.$$

Successivamente calcolarne, mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, massimo e minimo assoluto sull'ellisse $x^2+2y^2=28$.

3.12 Esercizio

Cercare gli estremi di $f(x,y)=4xy$ sull'ellisse $2x^2+2y^2-xy=1$.

3.13 Esercizio (da [1])

Nel piano verticale Oxy, con l'asse y orientato verso l'alto, un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla circonferenza C di centro 0 e raggio 1, ed è collegato al punto $(1,0)$ mediante una molla ideale che ha costante elastica k. Trovare la posizione di equilibrio stabile del punto sotto l'azione congiunta della forza di gravità e della forza elastica della molla.
(Suggerimento: si tratta di minimizzare l'energia potenziale del sistema)

3.14 Esercizio

Trovare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2}$$

sul vincolo $\{xy=1,\,x,y>0\}$.

3.15 Esercizio

Determinare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y,z)=xyz$ sul vincolo $M=\{xy+xz+yz=1,\,x,y,z\geq 0\}$.
Provare che, per ogni parallelepipedo rettangolo di dimensioni x,y,z vale

$$V\leq\frac{1}{6\sqrt{6}}S$$

dove V è il volume e S è la superficie totale.

3.16 Esercizio

Trovare i valori di massimo e minimo assoluti delle funzioni

$$f_1(x,y,z)=x\qquad f_2(x,y,z)=y\qquad f_3(x,y,z)=z$$

sul vincolo

$$E=\left\{x^2+y^2+4z^2=1\right\}\cap\left\{x+2y+3z=0\right\}$$

3.17 Esercizio

Trovare i valori di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$$

sul vincolo

$$\Gamma = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\} \cap \{ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \}$$

sapendo che $a, b, c > 1$ e $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$.

3.18 Esercizio (adattato a partire da [1])

Una tenda/gazebo ha la forma di cilindro circolare retto sormontato da un cono circolare retto. Sapendo che sia il cilindro che il cono hanno raggio di base pari a 5, e che l'area totale della tenda (esclusa la base/pavimento) è pari a 50π, trovare l'altezza del cilindro e l'altezza del cono che massimizzano il volume interno.

References

[1] E. Giusti: *Analisi Matematica 2* - Bollati Boringhieri