Conclusione del discorso iniziato la scorsa lezione:
(la nuova parte inizia da (*))

ESPLICITAZIONE DI SISTEMI (p.es. 2×3)

$$(S)\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \overset{\text{localmente}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y=f(x) \\ z=g(x) \end{cases} \quad ?$$

Sia $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ sol^{ne} di S. $\Longrightarrow$ $F(P_0)=G(P_0)=0$

Stiamo supponendo $F,G\in C^1(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^3$.

Se supponiamo anche $F_z(P_0)\neq 0 \overset{\text{Dini}}{\Longrightarrow}$ localmente (esiste un intorno t.c.)

la prima eq^{ne} si scrive nella forma $z=\varphi(x,y)$.

Sostituisco nella seconda:

$$\Phi(x,y)=G(x,y,\varphi(x,y))=0$$

$$\Phi(x_0,y_0)=G(x_0,y_0,\varphi(x_0,y_0))=G(P_0)=0$$

$$\Phi_y(x_0,y_0)=G_y(P_0)+G_z(P_0)\,\varphi_y(x_0,y_0)=G_y(P_0)-\frac{G_z(P_0)F_y(P_0)}{F_z(P_0)}$$

$$=-\frac{F_y(P_0)}{F_z(P_0)}$$

$$\Phi_y(x_0,y_0) = G_y(P_0) + G_z(P_0)\,\varphi_y(x_0,y_0) = G_y(P_0) - \frac{G_z(P_0)F_y(P_0)}{F_z(P_0)}$$

Imponiamo che questa sia $\neq 0$ per applicare Dini a Φ.

<u>Ipotesi</u> $(F_zG_y - G_zF_y)(P_0) \neq 0$, cioè $\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0) \neq 0$

$$\parallel$$

$$\begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix}$$

In questo caso, localmente l'eq^{ne} $\Phi(x,y)=0$ si scrive come $y=f(x)$

$\Rightarrow z = \varphi(x,y) = \varphi(x,f(x)) =: g(x)$

$\Longrightarrow$ in un intorno del punto (P_0) il sistema (S) è equivalente a $y=f(x)$, $z=g(x)$.

L'abbiamo fatto nelle ipotesi 1) $F(P_0)=G(P_0)=0$

2) $\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0) \neq 0$ 3) $F_z(P_0) \neq 0$.

In realtà l'ipotesi 3) si può eliminare perché, dalla 2), se fosse $F_z(P_0)=0$, dovremmo avere $G_z(P_0)\neq 0$, e quindi posso rifare tutto scambiando G e F

Abbiamo dimostrato che il sistema si può esplicitare localmente nella forma $y=f(x)$, $z=g(x)$ sotto l'ipotesi 1) e 2)

+ Si possono trovare espressioni per le derivate di f e g.

$$(S)\quad \begin{cases} F(x, f(x), g(x))=0 \\ G(x, f(x), g(x))=0 \end{cases} \qquad \forall x \in \text{Intorno di } x_0.$$

derivo

$$\Longrightarrow \begin{cases} F_x + F_y f'(x) + F_z g'(x) = 0 \\ G_x + G_y f'(x) + G_z g'(x) = 0 \end{cases}$$

sistema lineare in f', g' $\Longrightarrow$ $f'(x) = \ldots$

$g'(x) = \ldots$

In particolare $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$ si trovano esplicitamente

Abbiamo esplicitato $y = f(x)$, $z = g(x)$
sotto l'ipotesi
$$\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \neq 0 \text{ nel pto } \underline{P}_0$$

Sotto queste ipotesi il sistema $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$
si è trasformato in una
curva regolare $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z = g(t) \end{cases}$. Cambiando eventualmente le variabili,
questo lo posso fare purché la matrice

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{bmatrix}(\underline{P}_0) \text{ abbia rango } 2 \qquad (*)$$

questo discorso è da continuare..

Questa condizione equivale a imporre

$\nabla F(\underline{P}_0)$ non parallelo a $\nabla G(\underline{P}_0)$

Poiché $\nabla F(\underline{P}_0) \neq 0$, il vincolo $F=0 \Rightarrow$ Posso esplicitare localmente $F(x,y,z)=0$ nella forma (p.es.) $z=\varphi(x,y)$ con $\varphi \in C^1$.

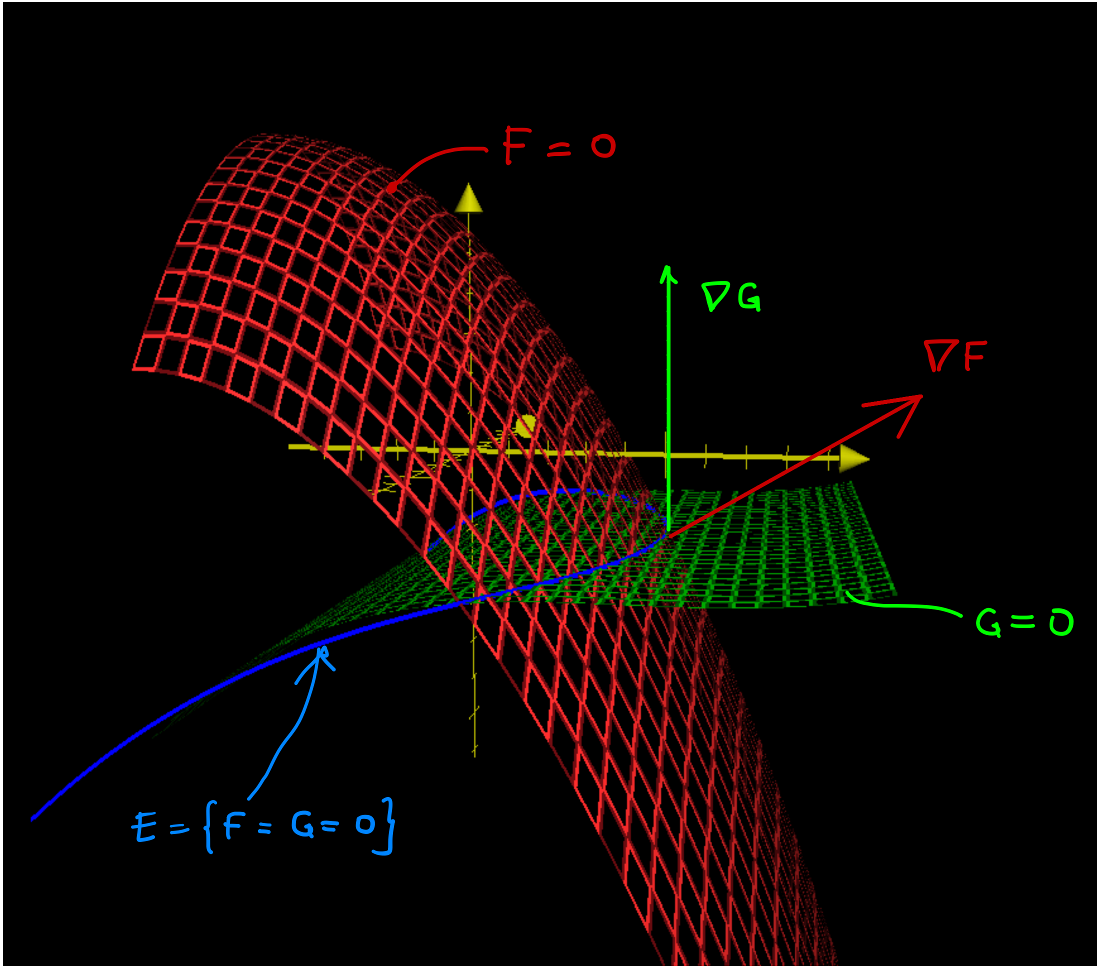
Anche in questo caso si dimostra che $\nabla F(\underline{P}_0)$ è ortogonale (al piano tangente) alla superficie

Stessa cosa per G.

La condizione $\nabla F(\underline{P}_0) \not\parallel \nabla G(\underline{P}_0)$ significa che in $\underline{P}_0$

i due piani tg alla superficie $F=0$ e alla sup. $G=0$ non sono coincidenti $\Rightarrow$ Questo garantisce che il sistema $\begin{cases} F=0 \\ G=0 \end{cases}$ localmente descrive una curva regolare.

Vedere disegno alla pagina successiva.


F = 0
∇G
∇F
G = 0
E = {F = G = 0}

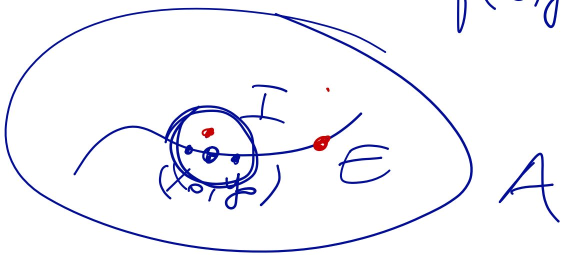
MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

Problema da risolvere: trovare i max. e min. relativi di una funzione $f(x,y)$ sotto un vincolo del tipo $G(x,y)=0$.

Sia A aperto $\subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(A)$, consideriamo un insieme della forma $E = \{(x,y) : G(x,y) = 0\}$ dove G è una funz. $C^1(A)$.

DEF. $(x_0,y_0) \in A \cap E$ è un p.to di max. (min.) relativo per f sotto il vincolo E se $\exists$ intorno I di (x_0,y_0) t.c.

$$f(x_0,y_0) \geq (\leq) f(x,y) \quad \forall (x,y) \in I \cap E$$



Supponiamo ora che $\nabla G(x_0,y_0) \neq (0,0)$. $\Longrightarrow$

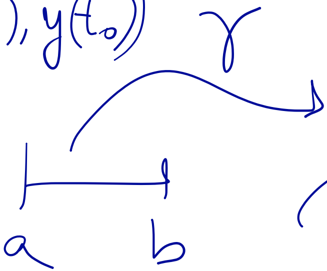
il teorema di Dini garantisce che localmente l'insieme E è un grafico, cioè è il sostegno di una curva regolare.

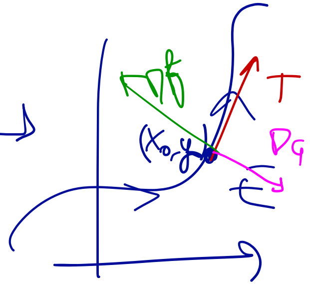
Cosa succede se devo cercare i max. e min. relativi su un insieme sostegno di una curva regolare?

$$E=\{(x,y): (x,y)=\underline{\gamma}(t),\ t\in[a,b]\}$$

Supponiamo che $(x_0,y_0)\in E$ sia un punto di max./min. rel. vincolato a E.

Vuol dire che, se $(x_0,y_0)=\underline{\gamma}(t_0)=(x(t_0),y(t_0))$ con $t_0\in(a,b)$,





$$\varphi(t)=f(\underline{\gamma}(t))=f(x(t),y(t))$$

ha un max/min. relativo in $t=t_0$

$$\Rightarrow \varphi'(t_0) = 0$$

$$0 = \varphi'(t_0) = f_x(\underline{\gamma}(t_0))\, x'(t_0) + f_y(\underline{\gamma}(t_0))\, y'(t_0) =$$

$$= \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x'(t_0), y'(t_0)) =$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0,y_0) \cdot \underline{T}(t_0) = 0$$

$$\underline{T} = \frac{\underline{\gamma}'(t_0)}{\|\underline{\gamma}'(t_0)\|}$$

Teorema

Siano f, E come sopra, e sia (x_0,y_0) un pto di max/min relativo di f vincolato ad E.

Allora $\nabla f(x_0,y_0)$ è ortogonale al versore tangente alla curva E

cioè " " " " alla curva

OSS

Se $E = \{(x,y) : G(x,y) = 0\}$, se $G : A \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(A)$

e se $(x_0,y_0) \in E$ è tale che $\nabla G(x_0,y_0) \neq 0$ (pto regolare di $G=0$)

(Dini) $\Rightarrow$ E è localmente il sostegno di una curva regolare

e $\nabla G(x_0,y_0) \perp E$ (nel senso che è ortogonale al versore tangente alla curva di livello $G=0$)

$\Rightarrow$ se (x_0,y_0) è anche p.to di estremo relativo per f vincolato a E, i due vettori ∇f e ∇G sono paralleli:

$$\lambda \nabla G(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \quad \text{per un } \lambda \in \mathbb{R}.$$

TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Siano $f(x,y), G(x,y) \in C^1(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^2$.

Sia $(x_0,y_0) \in E = \{(x,y) \in A : G(x,y)=0\}$ un punto regolare di E (cioè $\nabla G(x_0,y_0) \neq \underline{0}$)

Se (x_0,y_0) è un p.to di max./min. relativo di f vincolato a E, allora $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. (x_0,y_0,λ) sia soluzione del sistema

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = \lambda G_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) = \lambda G_y(x_0,y_0) \\ G(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

<u>OSS</u>. In altre parole, (x_0, y_0, λ) deve essere un p.to critico libero della funzione

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda \varphi(x,y)$$

- **Esempio:** Trovare massimo e minimo assoluti di $f(x,y) = 4 - \sqrt{3}x - y$ sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$

<u>1° modo)</u> parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad \underline{\gamma}(t)$$

<u>OSS</u> max. e min. assoluti, per Weierstrass

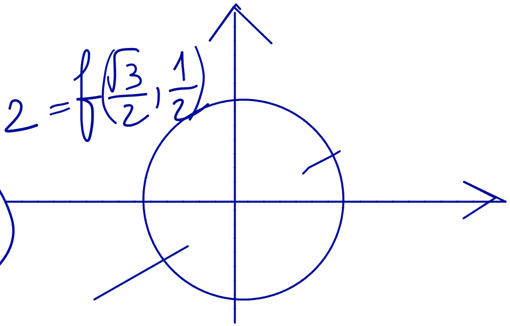
$$\varphi(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t) = 4 - \sqrt{3}\cos t - \operatorname{sen} t$$

$$\varphi'(t) = \sqrt{3}\operatorname{sen} t - \cos t = 0 \text{ per } \operatorname{tg} t = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

cioè $t = \frac{\pi}{6}$, $t = \frac{7}{6}\pi$ $(+2k\pi)$

Per $t = \frac{\pi}{6}$ si ha il minimo $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 2 = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Per $t = \frac{7}{6}\pi$ si ha il max $\varphi\left(\frac{7}{6}\pi\right) = 6 = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$



2°) modo (Moltiplicatori di Lagrange)

$G(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

Tutti i punti del vincolo $E = \{x^2 + y^2 = 1\}$ sono regolari

Cerco le sol^{ni} del sistema

$$\begin{cases} -\sqrt{3} = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow 2\lambda = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{x} = -\frac{1}{y}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{x}{\sqrt{3}}}$$

$$x^2 + \frac{x^2}{3} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$\Longrightarrow$ stesse conclusioni di prima.

3. Mostrare che l'insieme E dei punti (x, y) del piano che verificano la disuguaglianza

$$x^4 + y^4 \leq 1$$

è chiuso e limitato. Successivamente calcolare massimo e minimo assoluti di $f(x, y) = x - 8y$ su E.

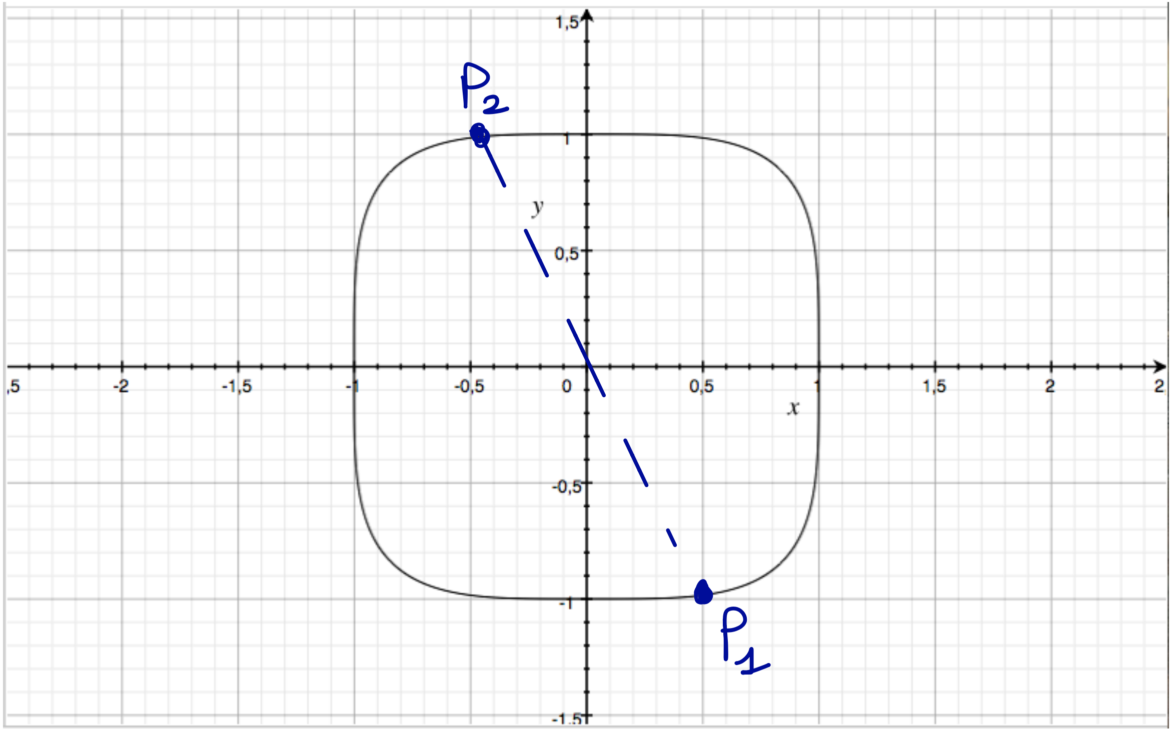
E è chiuso perché della forma $h(x,y) \leq 1$, con h continua in $\mathbb{R}^2$.

E è limitato, perché

$(x,y) \in E \Rightarrow x^4 + y^4 \leq 1 \Rightarrow x^4 \leq x^4 + y^4 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1$

analogamente $|y| \leq 1$

$E \subset [-1,1] \times [-1,1]$



P2
P1
y
x
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
,5
-2
-1,5
-1
-0,5
0,5
1
1,5
2
2

Vale Weierstrass $\Longrightarrow$ $\exists$ max. e min. assoluti di f. DOVE?

$\nabla f(x,y) = (1,-8) \neq 0 \Rightarrow$ niente pti critici

max. e minimo devono stare sulla frontiera

$$\partial E = \{(x,y) : x^4 + y^4 = 1\} \qquad G(x,y) = x^4 + y^4 - 1$$

$\nabla G(x,y) = (4x^3, 4y^3)$ si annulla solo in $(0,0) \notin \partial E$

Moltiplicatori di Lagrange

$$\underbrace{\begin{cases} 1 = \lambda 4 x^3 \\ -8 = \lambda 4 y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}}$$

$$4\lambda = \frac{1}{x^3} = -\frac{8}{y^3} \Longrightarrow y^3 = -8x^3$$

$$y = -2x$$

$$x^4 + 16x^4 = 1 \Longrightarrow x^4 = \frac{1}{17} \Longrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{17}}$$

$$P_1\left(\frac{1}{\sqrt[4]{17}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{17}}\right), \quad P_2 = -P_1$$

P_1 è il pto di max assoluto, P_2 è il pto di minimo assoluto.

ESERCIZIO

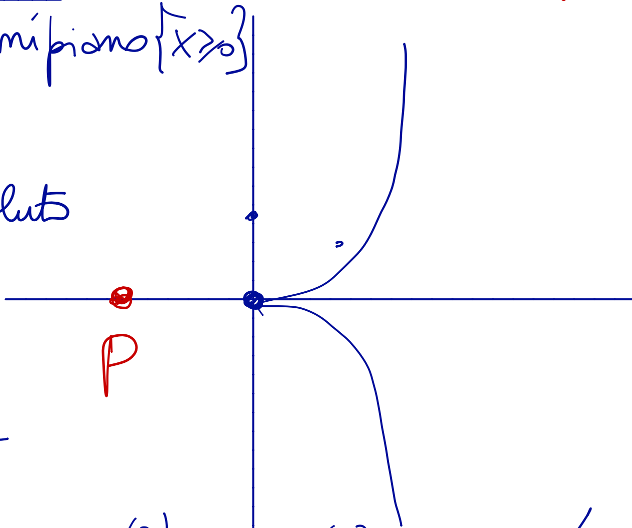
Tra i punti della curva $x^3-y^2=0$, determinare quello/i di distanza minima dal punto $P(-1,0)$.

$G(x,y)=x^3-y^2$

OSS La curva è tutta contenuta nel semipiano $\{x\geq 0\}$

$(0,0)$ appartiene alla curva

$\Rightarrow (0,0)$ è il pto di min assoluto



Provo a ritrovarlo con i moltiplicatori di Lagrange

$$f(x,y) = d((x,y),P)^2 = (x+1)^2+y^2$$

Il sistema diventa

$$\begin{cases} 2(x+1)=3\lambda x^2\\ 2y=-2\lambda y\\ x^3=y^2\end{cases}$$

$\Rightarrow y=0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} x=0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} 2=0$ ↯

$\Rightarrow \lambda=-1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} 3x^2+2x+2=0$

a lezione avevo sbagliato i segni!

$\Delta<0 \Rightarrow$ nessuna sol.

Non ha funzionato perché $(0,0)$, che è il pto di minimo, è un pto singolare per il vincolo $\nabla G = (3x^2, -2y) = (0,0)$

- **Esercizio:** Trovare le dimensioni di una scatola a forma di parallelepipedo senza coperchio che ha volume massimo se l'area della superficie della scatola è 12.

da fare la prossima volta!