ESPLICITAZIONE DI SISTEMI (p.es. 2x3)

$$(S)\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \overset{\text{localmente}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y=f(x) \\ z=g(x) \end{cases} \quad ?$$

Sia $\underline{P_0}=(x_0,y_0,z_0)$ sol^{ne} di S. $\Longrightarrow$ $F(P_0)=G(P_0)=0$

Stiamo supponendo $F,G\in C^1(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^3$.

Se supponiamo anche $F_z(\underline{P_0})\neq 0 \overset{\text{Dim}}{\Longrightarrow}$ localmente (esiste un intorno t.c.)

la prima eq^{ne} si scrive nella forma $z=\varphi(x,y)$.

Sostituisco nella seconda:

$$\Phi(x,y)=G(x,y,\varphi(x,y))=0$$

$$\Phi(x_0,y_0)=G(x_0,y_0,\varphi(x_0,y_0))=G(P_0)=0$$

$$\Phi_y(x_0,y_0)=G_y(P_0)+G_z(P_0)\,\varphi_y(x_0,y_0)=G_y(P_0)-\frac{G_z(P_0)\,F_y(P_0)}{F_z(P_0)}$$

$$\varphi_y(x_0,y_0) = -\frac{F_y(P_0)}{F_z(P_0)}$$

$$\Phi_y(x_0,y_0) = G_y(P_0) + G_z(P_0)\,\varphi_y(x_0,y_0) = G_y(P_0) - \frac{G_z(P_0)\,F_y(P_0)}{F_z(P_0)}$$

Imponiamo che questa sia $\neq 0$ per applicare Dini a Φ.

<u>Ipotesi</u> $(F_z G_y - G_z F_y)(P_0) \neq 0$, cioè $\det \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0) \neq 0$

$$\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \det \begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix}$$

In questo caso, localmente l'eq^{ne} $\Phi(x,y)=0$ si scrive come $y=f(x)$

$\Rightarrow z = \varphi(x,y) = \varphi(x, f(x)) =: g(x)$

$\Longrightarrow$ in un intorno del punto (P_0) il sistema (S) è equivalente a $y=f(x)$, $z=g(x)$.

L'abbiamo fatto nelle ipotesi 1) $F(P_0) = G(P_0) = 0$

2) $\det \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0) \neq 0$ 3) $F_z(P_0) \neq 0$.

In realtà l'ipotesi 3) si può eliminare perché, dalla 2), se fosse $F_z(P_0)=0$, dovremmo avere $G_z(P_0)\neq 0$, e quindi posso rifare tutto scambiando G e F

Abbiamo dimostrato che il sistema si può esplicitare localmente nella forma $y=f(x)$, $z=g(x)$ sotto l'ipotesi 1) e 2)

+ Si possono trovare espressioni per le derivate di f e g.

$$(S)\quad \begin{cases} F(x, f(x), g(x))=0 \\ G(x, f(x), g(x))=0 \end{cases} \qquad \forall x \in \text{Intorno di } x_0.$$

derivo

$$\Longrightarrow \begin{cases} F_x + F_y f'(x) + F_z g'(x) = 0 \\ G_x + G_y f'(x) + G_z g'(x) = 0 \end{cases}$$

sistema lineare in f', g' $\Longrightarrow$ $f'(x) = \ldots$

$g'(x) = \ldots$

In particolare $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$ si trovano esplicitamente

Abbiamo esplicitato $y = f(x)$, $z = g(x)$

sotto l'ipotesi $\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \neq 0$ nel pto $\underline{P}_0$

Sotto queste ipotesi il sistema $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

si è trasformato in una

curva regolare $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z = g(t) \end{cases}$. Cambiando eventualmente le variabili,

questo lo posso fare purché la matrice

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{bmatrix}(\underline{P}_0)$$ abbia rango 2.

Questa parte è sostanzialmente tratta dal libro "Analisi Matematica II" di Enrico Giusti, di cui si allegano due pagine qui sotto

questo discorso è da continuare..

2 eq^{ni} in 4 incognite

$$(S)\begin{cases} F(x,y,s,t)=0 \\ G(x,y,s,t)=0 \end{cases} \overset{\text{localmente}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} s=u(x,y) \\ t=v(x,y) \end{cases} \quad ?$$

Le ipotesi per poterlo fare saranno

$F(P_0)=G(P_0)=0 \qquad \underline{P_0} \doteq (x_0,y_0,s_0,t_0)$

$$\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(s,t)}(\underline{P_0}) \neq 0.$$

TEOREMA (Dini per i sistemi)

A aperto di $\mathbb{R}^{n+h}$, $\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^{n+h} \to \mathbb{R}^h$ di classe $C^1(A; \mathbb{R}^h)$

$$\begin{pmatrix} \underline{x} = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \underline{y} = (y_1, \dots y_h) \in \mathbb{R}^h \end{pmatrix} \quad (\underline{x}, \underline{y}) \longmapsto \underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) = (F_1(\underline{x}, \underline{y}), \dots, F_h(\underline{x}, \underline{y}))$$

Sia $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in A$ t.c. 1) $\underline{F}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = \underline{0}$ 2) $\det \dfrac{\partial(F_1, \dots F_h)}{\partial(y_1, \dots y_h)}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \neq 0$

OSS se $n = h = 1$, sono le stesse ipotesi di Dini "scalare".

Allora $\exists$ intorno sferico I di $\underline{x}_0$, $\exists$ intorno sferico J di $\underline{y}_0$
$\exists!\ \underline{f} : I \to J$ t.c.
$\forall (\underline{x}, \underline{y}) \in I \times J$ si ha

cioè $\underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) = \underline{0}$

$$\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \iff \underline{y} = \underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots f_h(\underline{x}))$$

Inoltre $\underline{f} \in C^1(I;J)$ e si ha

$$\frac{\partial(f_1,\dots f_h)}{\partial(x_1,\dots x_n)}(\underline{x}) = -\overbrace{\left[\frac{\partial(F_1,\dots F_h)}{\partial(y_1,\dots y_h)}(\underline{x},\underline{f}(\underline{x}))\right]^{-1}}^{h\times h} \cdot \overbrace{\frac{\partial(F_1,\dots F_h)}{\partial(x_1,\dots x_n)}(\underline{x},\underline{f}(\underline{x}))}^{h\times n}$$

prodotto righe per colonne.

Nel caso di Dini "scalare" era

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$$

In particolare se $\underline{x}=\underline{x}_0$, tutte le matrici sono calcolate in $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$

$$J_f = -\left[J_{F,y}\right]^{-1} J_{F,x}$$

ESERCIZIO

Considerare il Sistema

$$(S)\begin{cases} y\cos(xz) - x^2 + 1 = 0 \\ y\sin(xz) - x = 0 \end{cases}$$

1) Verificare che, in un intorno del punto $\left(1, 1, \frac{\pi}{2}\right)$ si può esplicitare nella forma $\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$

2) Trovare lo sviluppo di Taylor del primo ordine di f e g (definite nel punto precedente) con punto iniziale $x_0 = 1$.

$$(S)\quad \begin{cases} F(x,y,z) = y\cos(xz) - x^2 + 1 = 0 \\ G(x,y,z) = y\sin(xz) - x = 0 \end{cases}$$

Poniamo $\underline{P_0} = (x_0, y_0, z_0) = \left(1, 1, \frac{\pi}{2}\right)$

$F(P_0) = 0, \quad G(P_0) = 0$

$F_y(x, y, z) = \cos(xz) \qquad F_y(P_0) = 0$

$F_z(\quad) = -xy\,\text{sen}(xz) \qquad F_z(P_0) = -1$

$G_y(\quad) = \sin(xz) \qquad G_y(P_0) = 1$

$G_z(\quad) = yx\cos(xz) \qquad G_z(P_0) = 0$

$$\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0) = \det\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

questa è la condizione del teorema di Dini.

Dini con $n=1$, $h=2$

$\Longrightarrow \exists$ intorno I di $x_0 = 1$, $\exists$ J intorno di $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

$\exists!$ $\Phi : I \to J$

$x \longmapsto \underline{\Phi}(x) = (f(x), g(x))$ t.c.

$F(x, f(x), g(x)) = 0$

$G(x, f(x), g(x)) = 0$

in altre parole, ho usato (S) come $y = f(x)$, $z = g(x)$

$f(1) = 1$; $g(1) = \frac{\pi}{2}$.

$F_x(x,y,z) = -yz\sin(xz) - 2x$

$G_x(\quad) = yz\cos(xz) - 1$

$f'(1) = ?$ $g'(1) = ?$

$$\frac{d(f,g)}{dx}(1) = \begin{pmatrix} f'(1) \\ g'(1) \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \frac{\partial(F,G)}{\partial x}(P_0) = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} - 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d(f,g)}{dx}(1) = \begin{pmatrix} f'(1) \\ g'(1) \end{pmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \frac{\partial(F,G)}{\partial x}(P_0) = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2}-2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

regolette per matrici 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\frac{d(f,g)}{dx}(1) = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2}-2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\pi}{2}-2 \end{bmatrix}$$

$f'(1) = 1$

$g'(1) = -\left(\frac{\pi}{2}+2\right)$

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + o(x-1) = 1 + (x-1) + o(x-1) \quad \text{per } x \to 1$$

$$g(x) = \ldots$$

Se volessi scrivere il polinomio di Taylor di grado 2?

$$F(x, f(x), g(x)) = 0 \qquad \forall x \in I$$

$$G(\qquad\qquad) = 0 \Rightarrow \text{derivo}$$

$$F_x + F_y f'(x) + F_z g'(x) = 0$$

$$G_x + G_y f'(x) + G_z g'(x) = 0$$

riderivo

$$F_{xx} + F_{xy} f' + F_{xz} g' + (F_{yx} + F_{yy} f' + F_{yz} g') f' + F_y f'' +$$

$$+ (F_{zx} + F_{zy} f' + F_{zz} g') g' + F_z g''(x) = 0$$

troviamo

$+$ analoga eguaglianza per G $\Longrightarrow g''(1), f''(1)$

ESERCIZIO

Dato il sistema $F(x,y,s,t)$ $G(x,y,s,t)$

$$(S)\quad \begin{cases} (y+3)s - \operatorname{tg}(s+t) + 2x = 0 \\ \operatorname{sen}(s+t) + 3y - x(t+3) = 0 \end{cases}$$

verificare che in un intorno del punto $(0,0,0,0)$ esso è equivalente a
$\underline{0}$

$$\begin{cases} s = u(x,y) \\ t = v(x,y) \end{cases}$$

Trovare le derivate parziali di u e v in $(0,0)$.

$$F(\underline{0}) = G(\underline{0}) = 0$$

$F_s(x,y,s,t) = y+3-(1+\operatorname{tg}^2(s+t))$ $\qquad F_s(\underline{0}) = 2$

$F_t(\quad) = -(1+\operatorname{tg}^2(s+t))$ $\qquad F_t(\underline{0}) = -1$

$G_s(\quad) = \cos(s+t)$ $\qquad G_s(0) = 1$

$G_t(\quad) = \cos(s+t) - x$ $\qquad G_t(0) = 1$

$F_s(\underline{0}) = 2$

$F_t(\underline{0}) = -1$

$G_s(0) = 1$

$G_t(0) = 1$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(s,t)}(\underline{0}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \frac{\partial(F,G)}{\partial(s,t)} = 3$$

Si applica Dini con $n = k = 2$

$\Rightarrow$ $\exists$ intorno I di $(0,0)$, $\exists$ intorno J di $(0,0)$

$\exists! \, (u,v) : I \longrightarrow J$ t.c.

$F(x, y, u(x,y), v(x,y)) = 0$ in I

$G(\qquad\qquad) = 0$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(0,0) = -\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Ad esempio:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = -\frac{1}{3}(-2-6) = \frac{8}{3}$$

Se le variabili x, y e z sono legate tra loro dalle due relazioni

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{5.13}$$

è naturale supporre che due delle variabili possano essere espresse localmente come funzioni della terza; ad esempio

$$y=f(x) \quad \text{e} \quad z=g(x).$$

Per vedere sotto quali condizioni questo è effettivamente possibile, supponiamo che $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ sia un punto tale che

$$F(P_0)=0, \quad G(P_0)=0.$$

Se poi risulta $F_z(P_0)\neq 0$, in un intorno W di P_0 l'insieme Z_F degli zeri della funzione F è grafico di una funzione

$$z=\varphi(x,y).$$

Un punto di $Z_F \cap W$ apparterrà a Z_G se e solo se

$$G(x,y,\varphi(x,y))=0.$$

Si consideri ora la funzione

$$\Phi(x,y)=G(x,y,\varphi(x,y)),$$

definita in un intorno del punto (x_0, y_0). Si ha

$$\Phi(x_0,y_0)=0$$

e

$$\Phi_y=G_y+G_z\varphi_y=G_y-G_zF_y/F_z. \tag{5.14}$$

Se risulta $\Phi_y(x_0,y_0)\neq 0$, la y si può scrivere localmente come funzione di x

$$y=f(x),$$

cosicché in definitiva esiste un intorno di P_0 dove il sistema [5.13] è equivalente alle equazioni esplicite:

$$y=f(x), \quad z=\varphi(x,f(x))=g(x).$$

Le condizioni sotto le quali una tale esplicitazione è stata possibile sono

$$F_z(P_0) \neq 0 \quad \text{e} \quad \Phi_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Quest'ultima è equivalente alla condizione

$$G_y F_z - G_z F_y \neq 0 \quad \text{in } P_0. \tag{5.15}$$

Se si pone

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{pmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{pmatrix},$$

la [5.15] equivale alla

$$\det \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \neq 0 \quad \text{in } P_0. \tag{5.16}$$

Osserviamo che la [5.16] è sufficiente da sola ad assicurare la possibilità di esplicitare le variabili y e z come funzioni di x (in altre parole l'ipotesi $F_z(P_0) \neq 0$ è superflua). Infatti se la [5.16] è verificata non si può avere

$$F_z(P_0) = G_z(P_0) = 0,$$

cosicché o risulta $F_z(P_0) \neq 0$, e si può ragionare come sopra, o deve essere $G_z(P_0) \neq 0$, e si giunge alla stessa conclusione scambiando tra loro le funzioni F e G.

Osservazione 5.5. Se invece della [5.16] si avesse

$$\det \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \neq 0 \quad \text{in } P_0,$$

allora, ripetendo il ragionamento precedente, si concluderebbe che in un intorno del punto P_0 è possibile esplicitare le variabili x e y in funzione di z. Analogamente, la condizione

$$\det \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} \neq 0 \quad \text{in } P_0$$

implica la possibilità di esprimere le variabili x e z in funzione di y, in un intorno di P_0. In conclusione, se in un punto P_0 risulta

$$F(P_0) = G(P_0) = 0,$$

e se la matrice

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} F_x(P_0) & F_y(P_0) & F_z(P_0) \\ G_x(P_0) & G_y(P_0) & G_z(P_0) \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

ha caratteristica 2, allora in un intorno di P_0 due delle tre variabili x, y, z si possono esplicitare in funzione della terza.

In altre parole, è possibile trovare un intorno W di P_0 tale che, posto

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0\},$$

l'insieme $Z \cap W$ è sostegno di una curva regolare.

La condizione che la matrice [5.17] abbia caratteristica 2 ha un notevole significato geometrico. Cominciamo con l'osservare che essa si può scrivere in modo equivalente nella forma

$$\operatorname{grad} F(P_0) \wedge \operatorname{grad} G(P_0) \neq 0 \qquad [5.18]$$

la quale esprime il fatto che i vettori grad $F(P_0)$ e grad $G(P_0)$ sono linearmente indipendenti. Ciò implica in primo luogo che sia il gradiente di F che quello di G sono diversi da zero in P_0, e quindi in un intorno di P_0 le equazioni $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ individuano due superfici regolari; queste si intersecheranno lungo l'insieme Z, che sarà sostegno di una curva regolare se è verificata la [5.18], ovvero, ricordando l'osservazione 5.4, se i versori normali nel punto P_0 alle superfici $F = 0$ e $G = 0$ hanno direzioni diverse, cioè se le due superfici non sono tangenti.