

Foglio 3 (Analisi Vettoriale per Fisica a.a. 2015/16)

proff. F. Lanzara, A. Dall'Aglio, E. Montefusco

16 ottobre 2015

3.1 Esercizio

Siano

$$f(x, y) = 3xy + 4x - 4x^2 - 2y^2 - 4y$$

$$g(x, y) = 4xy + 4x + 2y^2 - 4y$$

- i. Determinare i punti stazionari o critici delle due funzioni,
- ii. determinare le matrici hessiane in tali punti,
- iii. decidere se le immagini $f(\mathbb{R}^2)$ e $g(\mathbb{R}^2)$ sono insiemi limitati e/o connessi e se coincidono con tutto \mathbb{R} .

3.2 Esercizio

- i. Determinare i punti critici o stazionari della funzione

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2)(1 - z^2) + z^2$$

- ii. Calcolare la matrice hessiana.
- iii. Classificare i punti critici

3.3 Esercizio

Data la funzione $f(x, y) = 2xy - y^2 + x^2$ determinare il massimo e il minimo assoluti nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

3.4 Esercizio

Si considerino i tre seguenti insiemi

$$B(O, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\mathbb{R}^2 \quad Q = [0, 1/10] \times [0, 2]$$

e sia $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

- i. Quali dei tre insiemi sono chiusi, limitati, chiusi e limitati?
- ii. Quali sono i punti critici di f interni a ciascuno

dei tre insiemi?

- iii. Determinare le tre immagini $f(\mathbb{R}^2)$, $f(B(O, 1))$ e $f(Q)$.

3.5 Esercizio

Siano $P = (x, y)$, $Q = (0, 1)$ e $R = (1, 0)$ e si ponga $f(x, y) = |P - Q|^2 |P - R|^2$.

- i. Determinare il minimo di f in \mathbb{R}^2 e dire in quale punto (x_m, y_m) è raggiunto,
- ii. determinare l'immagine $f(\mathbb{R}^2)$.

3.6 Esercizio

Si calcolino il minimo e il massimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^4}$$

in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^4 \leq 1\}$.

3.7 Esercizio

Si calcolino il minimo e il massimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$$

in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4\}$.

3.8 Esercizio

Sia $f(x, y) = e^x \sin(y)$ e $Q = [0, 1] \times [0, \pi] \subseteq \mathbb{R}^2$.

- i. Determinare i punti critici di f ,
- ii. Calcolare minimo e massimo assoluti di f in Q .

3.9 Esercizio

Sia $f(x, y) = -3 + 2\sqrt{2x^2 + 5y^2}$.

- i. Determinare le linee di livello di f .
- ii. Determinare gli eventuali punti di massimo o

minimo relativi.

iii. Determinare minimo e massimo assoluti di f nel quadrato di estremi $(-1, -1)$ e $(1, 1)$.

3.10 Esercizio

Determinare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = e^{4x-x^2-y^2}$ del disco $D = \{(x, y) : (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$.

3.11 Esercizio

Assegnata la funzione $f(x, y) = \sqrt{1 + \sin(3x + 5y)}$

- determinare il gradiente di f in $(0, 0)$ e la matrice hessiana di f in $(0, 0)$;
- scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0, 0, 1)$;
- scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado di f nell'origine;
- riconoscere se la forma quadratica, relativa alla matrice hessiana in $(0, 0)$, sia definita positiva o negativa, semidefinita positiva o negativa, indefinita.

3.12 Esercizio

Sia $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$$

Si provi che la funzione possiede almeno uno tra massimo e minimo assoluto. Si mostri anche che $f(\mathbb{R}^2)$ è limitato e si discuta se è chiuso o meno.

3.13 Esercizio

Sia $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

- Scrivere l'espressione del gradiente di f e della matrice hessiana di f nel generico punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
- determinare i punti critici di f in \mathbb{R}^2 ;
- classificare i punti critici di f ;
- determinare il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

3.14 Esercizio

Un solido S è composto da un cilindro sormontato da un cono (avente come base la sommità

del cilindro). Sapendo che la base del cilindro e del cono ha diametro 10 e che la superficie totale è 100, si individuino le altezze H e h (rispettivamente del cilindro e del cono) in modo che sia massimo il volume di S .

3.15 Esercizio

Trovare un punto sulla parabola $\{y = x^2\}$ in modo che la somma dei quadrati delle distanze dai punti $(-3, 0)$, $(0, 7/2)$ e $(1, 0)$ sia minima.

3.16 Esercizio

Trovare il minimo delle seguenti funzioni sui vincoli indicati a lato di ciascuno di essi

$$\begin{array}{ll} x^2 + y^2 + z^2 & x + 2y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 & x + 2y + z = 1 \quad \text{e} \quad 2x - y - 3z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 & x^2 yz = 1 \end{array}$$

Perché l'esercizio non chiede nulla riguardo i massimi?

3.17 Esercizio

Trovare il massimo della funzione $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 \cdots x_n^2$ sulla sfera unitaria $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 = 1\}$

3.18 Esercizio

Trovare i valori massimo e minimo della funzione $f(x, y, z) = x + 3y - z$ sull'insieme definito dalle equazioni $\{z = x^2 + y^2 = 2x + 4y\}$.

3.19 Esercizio

Trovare massimo e minimo valore della funzione

$$f(x, y) = mgy + \frac{1}{2}k[(x-1)^2 + y^2]$$

sul vincolo $\{x^2 + y^2 = 1\}$, sapendo che $m, g > 0$.