Come visto l'ultima volta, vogliamo capire se, data una $f(x,y)$ regolare

$$f(x,y)=0 \iff y=\varphi(x)$$ almeno in un intorno di (x_0,y_0)

TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE (Dini)

$f: A\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $f\in C^1(A)$ A aperto, $(x_0,y_0)\in A$ t.c.

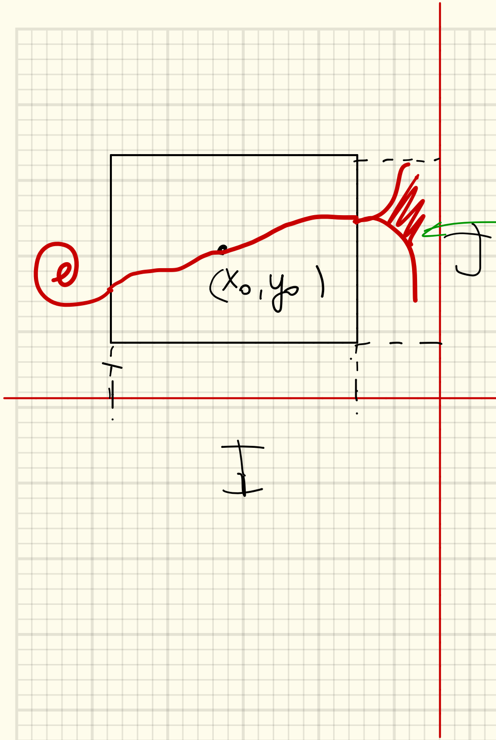
1) $f(x_0,y_0)=0$; 2) $f_y(x_0,y_0)\neq 0$.

Allora $\exists$ intorno $I=(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\exists$ intorno $J=(y_0-\sigma, y_0+\sigma)$ ed esiste un'unica funzione $\varphi: I\to J$ t.c.

$$\forall x\in I \quad f(x,\varphi(x))=0.$$

In altre parole, nell'intorno $I\times J$ si ha $f(x,y)=0 \iff y=\varphi(x)$

$$(x_0,y_0)\in E=\{(x,y):f(x,y)=0\}$$



fuori dall'intorno, E non è necessariamente un grafico.

Ripeto: $\forall x \in I \ \exists! \ y = \varphi(x)$ t.c. $f(x, \varphi(x)) = 0$.

OSS $\varphi(x_0) = y_0$

SECONDA PARTE DEL TEOREMA.

La $\varphi(x)$ così trovata è una funzione di classe $C^1(I)$, e si ha

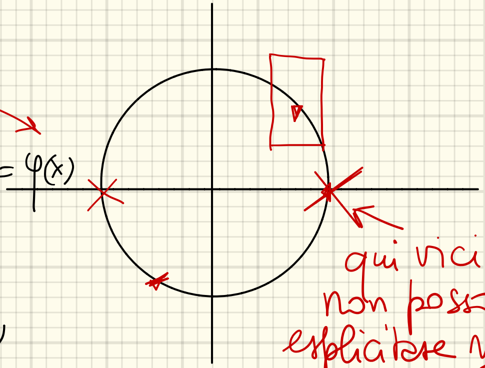
$$\varphi'(x) = - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} \qquad \forall x \in I$$

In particolare $\varphi'(x_0) = - \dfrac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$

Esempi: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ E è la circonf. di centro O e $r = 1$.

Sia $(x_0, y_0) \in E$ $f(x_0, y_0) = 0$

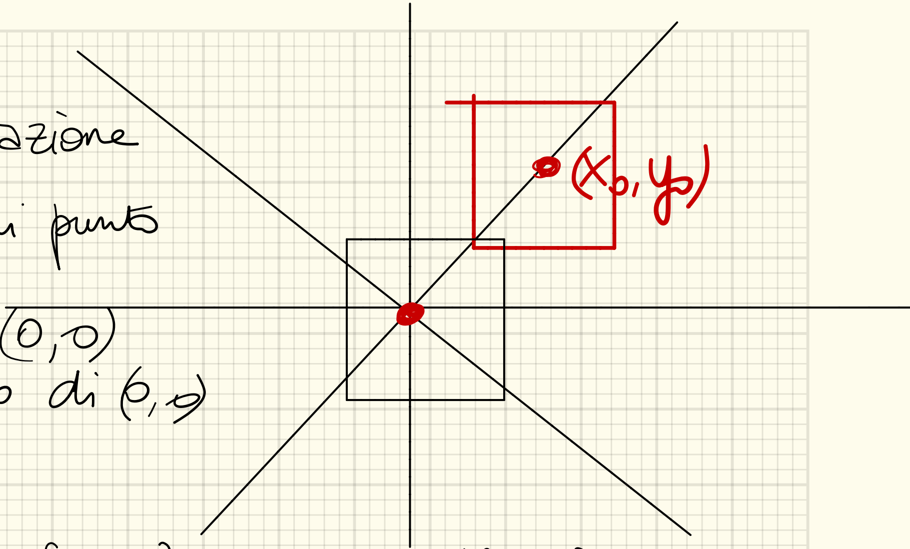
$f_y(x_0, y_0) = 2y_0$. Se $y_0 \neq 0$, E si può esplicitare localmente come $y = \varphi(x)$



Invece in tutti i punti meno $(0, \pm 1)$ vale $f_x(x_0, y_0) = 2x_0 \neq 0$, e quindi, per Dini, posso esplicitare $x = \psi(y)$

Poiché $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ $\forall (x_0, y_0) \in E$, nell'intorno di ogni pto posso esplicitare l'uguaglianza $f(x,y) = 0$ rispetto ad una delle due variabili.

2) $f(x,y) = x^2 - y^2$



In questo caso l'esplicitazione si può fare vicino a ogni punto di E, tranne $(x_0, y_0) = (0,0)$

Infatti in nessun intorno di $(0,0)$ E è un grafico

3) $f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow E = \{(0,0)\}$, non si applica Dini.

4) $f(x,y) \equiv 0 \Rightarrow E = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Dini non si applica in nessun p.to.

ESEMPIO:

Dimostrare che l'equazione

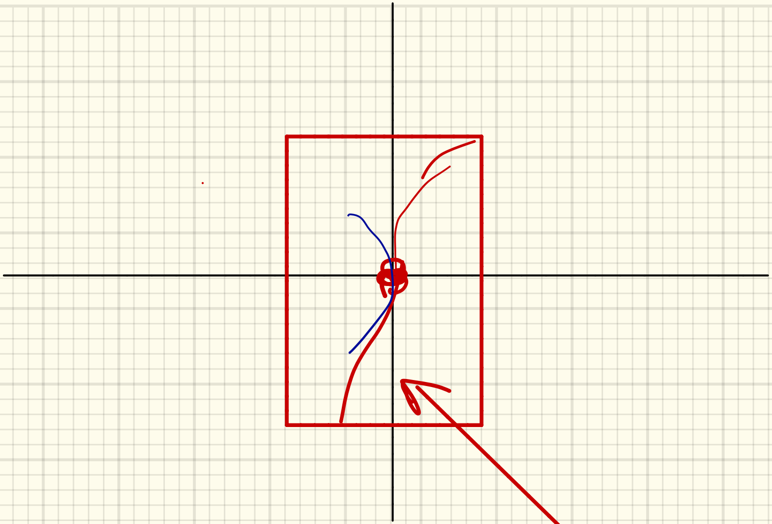
$$f(x,y) := (x+1)y^2 + \operatorname{sen}(xy) + 3(e^x - 1) = 0$$

definisce, in un intorno di $(0,0)$, una funzione $y = \varphi(x)$ opp. $x = \psi(y)$, e calcolare la derivata di φ (oppure ψ) nello zero

$f(0,0) = 0$; $f_x(x,y) = y^2 + y\cos(xy) + 3e^x \Rightarrow f_x(0,0) = 3$

$f_y(x,y) = 2y(x+1) + x\cos(xy) \Rightarrow f_y(0,0) = 0$.

Il teorema dice che: $\exists J$ intorno di $y_0 = 0$ $\exists I$ intorno di $x_0 = 0$ t.c. $\forall y \in J$ $\exists!\, x = \psi(y) \in I$ t.c. $f(\psi(y), y) = 0$



Inoltre $\psi'(0) = -\dfrac{f_y(0,0)}{f_x(0,0)} = 0$

OSS Il Teorema di Dini fornisce una CS, ma non C.N, per l'esplicitazione

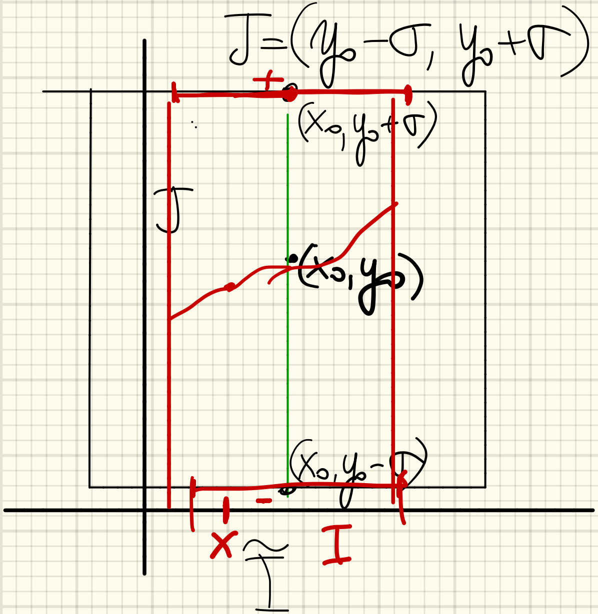
Esempio $f(x,y) = (y - x^2)^2 \qquad (x_0, y_0) = (0,0)$

$f(0,0) = 0 \qquad f_y(0,0) = 0 \Rightarrow$ non si può applicare Dini.

Tuttavia l'eq^{ne} $f(x,y) = 0$ equivale a $y = x^2$

(quindi abbiamo esplicitato nella forma $y = \varphi(x)$)

DIM. 1^a parte: esistenza di φ (e unicità). Supponiamo $f_y(x_0,y_0)>0$



Trovo un intorno rettangolare $\tilde{I} \times J$ di (x_0,y_0) in cui $f_y(x,y)>0$

(OSS si può fare per il thm. di permanenza del segno)

$f(x_0,y_0)=0 \Rightarrow$ dal segno di f_y

segue che $f(x_0,y_0-\sigma)<0$

$f(x_0,y_0+\sigma)>0$.

Per la continuità di f, $\exists I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ t.c.

$f(x, y_0 + \sigma) > 0 \ \forall x \in I$; $f(x, y_0 - \sigma) < 0 \ \forall x \in I$

Fissiamo $\bar{x} \in I$, e consideriamo $g(y) = f(\bar{x}, y)$

g continua, $g(y_0 - \sigma) < 0$, $g(y_0 + \sigma) > 0$, $g'(y) = f_y(\bar{x}, y) > 0 \Longrightarrow$

$\exists!$ pto $\bar{y}$ t.c. $g(\bar{y}) = 0$, cioè $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

Abbiamo provato: $\forall x \in I \ \exists! \ y = \varphi(x) \in J$ t.c $f(x, y) = 0$

<u>2ª parte</u> φ è continua (non lo dim.) ma la dim. è facile, sta sul [FMS]

<u>3ª parte</u> φ è derivabile (non lo dim.) idem...

<u>4ª parte</u> Diamo per buono che φ sia derivabile, troviamo la formula per la derivata.

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall\, x \in I$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dx}\Big(f(x, \varphi(x))\Big) = f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x))\, \varphi'(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi'(x) = -\,\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} \qquad \square$$

5. Mostrare che in un opportuno intorno del punto $(1,-1)$ i punti dell'insieme

$$E = \{(x,y)\ :\ \ln x + (y+1)x^2 = \operatorname{sen}(\pi y)\}$$

costituiscono il grafico di una funzione $y = f(x)$ oppure $x = f(y)$, e scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine della f con punto iniziale $x_0 = 1$ oppure $y_0 = -1$. Disegnare l'insieme E in un intorno di $(1,-1)$.

Poniamo $f(x,y) = \ln x + (y+1)x^2 - \operatorname{sen}(\pi y)$

$f(1,-1) = 0$

$f_x(x,y) = \frac{1}{x} + 2x(y+1) \qquad f_x(1,-1) = 1$

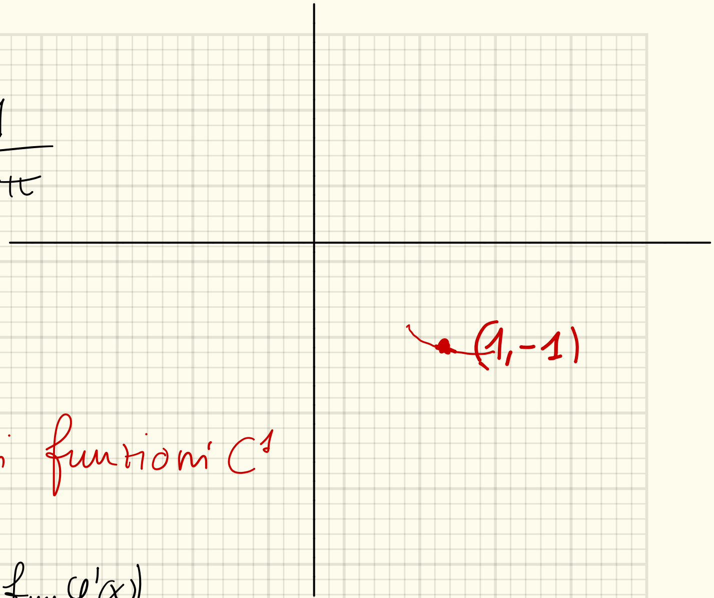
$f_y(x,y) = x^2 - \pi\cos(\pi y) \Longrightarrow f_y(1,-1) = 1+\pi$

Dini $\Rightarrow$ $\exists$ intorno I di $x_0 = 1$, $\exists J$ intorno di $y_0 = -1$, t.c.

$\forall x \in I\ \exists!\ y = \varphi(x) \in J$ t.c. $f(x, \varphi(x)) = 0$.

$$\varphi(1) = -1$$

$$\varphi'(1) = -\frac{f_x(1,-1)}{f_y(1,-1)} = -\frac{1}{1+\pi}$$



Vorrei calcolare φ''.

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))} \qquad \forall x \in I$$

rapporto di funzioni C^1

$\Rightarrow$ riderivo

$$\varphi''(x) = -\frac{(f_{xx} + f_{xy}\varphi')f_y - f_x(f_{xy} + f_{yy}\varphi'(x))}{f_y(x,\varphi(x))^2} =$$

$$\varphi''(x) = -\frac{(f_{xx} + f_{xy}\varphi')f_y - f_x(f_{xy} + f_{yy}\varphi'(x))}{f_y(x,\varphi(x))^2} =$$

$$= -\frac{\left(f_{xx} - f_{xy}\frac{f_x}{f_y}\right)f_y - f_x\left(f_{xy} - f_{yy}\frac{f_x}{f_y}\right)}{f_y^2} =$$

$$\boxed{= -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_x f_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}}$$

Tutte le derivate di f sono calcolate in $(x,\varphi(x))$, ma se $x = x_0$ sono calcolate in (x_0, y_0)

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{1}{y^2} + 2(y+1) \qquad f_{xx}(1,-1) = -1$$

$$f_{xy}(x,y) = 2x; \quad f_{xy}(1,-1) = 2$$

$$f_{yy}(x,y) = \pi^2 \operatorname{sen}(\pi y) \Rightarrow f_{yy}(1,-1) = 0$$

$$\varphi''(1) = -\frac{-(1+\pi)^2 - 2\cdot 2\cdot 1\cdot(1+\pi) + 0\cdot\ldots}{(1+\pi)^3} = \frac{1+\pi+4}{(1+\pi)^2} = \frac{\pi+5}{(1+\pi)^2}$$

Polinomio di Taylor di ordine 2

$$\varphi(x) = \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) + \frac{\varphi''(1)}{2}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$

per $x \to 1$

$$= -1 - \frac{1}{1+\pi}(x-1) + \frac{\pi+5}{2(1+\pi)^2}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$