2.4 Esercizio

Si trovino estremi relativi e assoluti della funzione

$$f(x,y) = e^{x^2-y^2}(x^4-y^4)$$

nel cerchio di centro l origine e raggio 2.

Poiché a lezione ho fatto un po' di confusione, ecco una risoluzione completa,

Determinazione dei pti critici

$$f_x(x,y) = e^{x^2-y^2}\left[2x(x^4-y^4)+4x^3\right] = 2x\,e^{x^2-y^2}\left[x^4-y^4+2x^2\right]$$

$$f_y(x,y) = e^{x^2-y^2}\left[-2y(x^4-y^4)-4y^3\right] = -2y\,e^{x^2-y^2}\left[x^4-y^4+2y^2\right]$$

Quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x\left[x^4-y^4+2x^2\right]=0 \\ y\left[x^4-y^4+2y^2\right]=0 \end{cases}$$

, che sono 3: $(0,0)$; $(0,\sqrt{2})$; $(0,-\sqrt{2})$

tutti contenuti nel cerchio considerato.

Per calcolare le derivate seconde con meno impegno, osserviamo che siamo interessati a p.ti critici della forma $(0,a)$.

Quindi per calcolare $f_{xx}(0,a) = \frac{\partial}{\partial x}\{2x e^{x^2-y^2}[x^4-y^2+2x^2]\}$ l'unico termine che non si annulla per $x=0$ è proprio quello in cui deriviamo il fattore x

Quindi $f_{xx}(0,a) = 2e^{-a^2}[-a^4]$

Analogamente $f_{xy}(0,a) = 0$

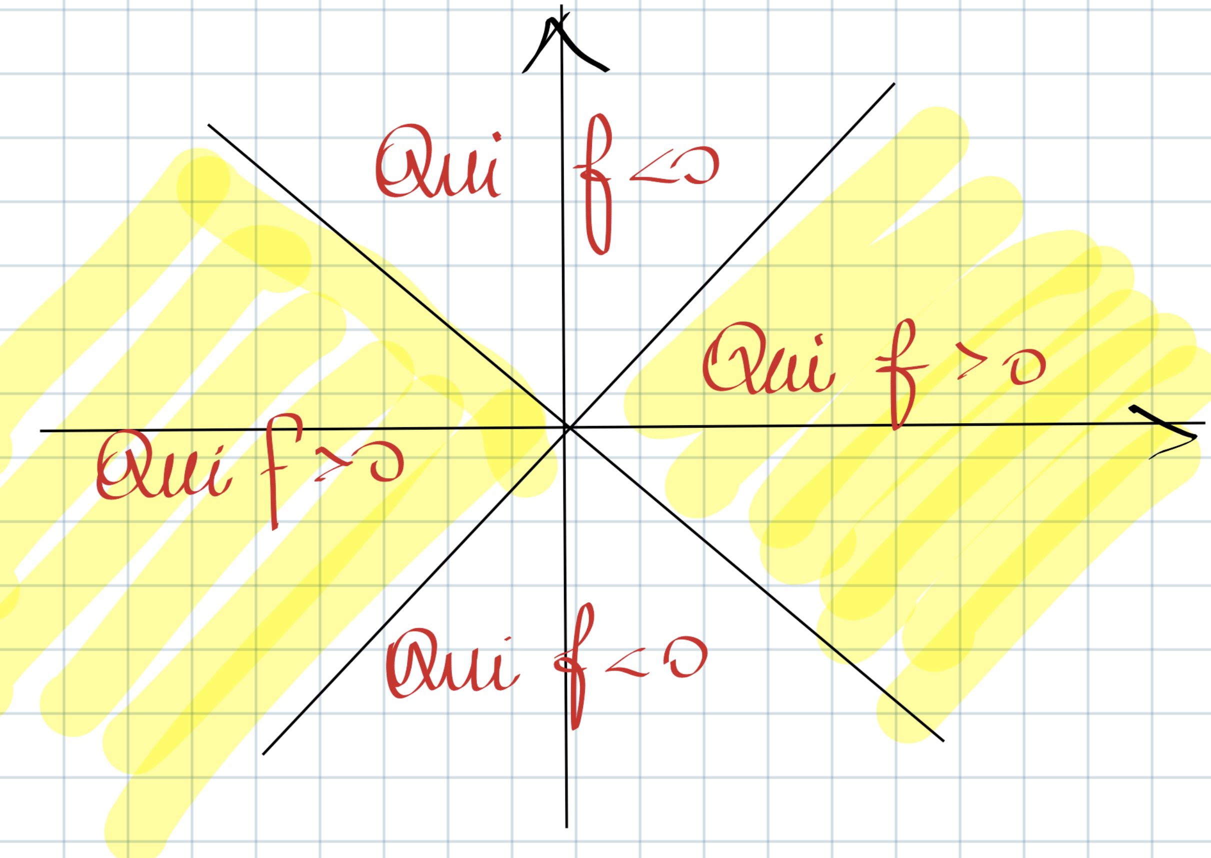
L'unica derivata che dobbiamo calcolare con un po' di fatica è

$$f_{yy}(0,a) = -2a^2 e^{-a^2}\{2a^4 - 9a^2 + 6\}$$

Ne segue che $D^2 f(0, \pm\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -8e^{-2} & 0 \\ 0 & 16e^{-2} \end{bmatrix} \Rightarrow$ punti di sella

Nell'origine invece $D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, quindi l'Hessiano non ci dice nulla.

Tuttavia lo studio del segno di f ci dice che f è positiva nella regione in cui $|y|<|x|$, negativa in quella dove $|y|>|x|$.



Quindi $(0,0)$ è un punto di sella.

Per quanto riguarda gli estremi assoluti su $E=\{(x,y): x^2+y^2\leq 4\}$, che devono esistere per il teorema di Weierstrass, essi devono essere assunti sulla frontiera ∂E, dato che all'interno di E tutti i punti critici sono di sella.

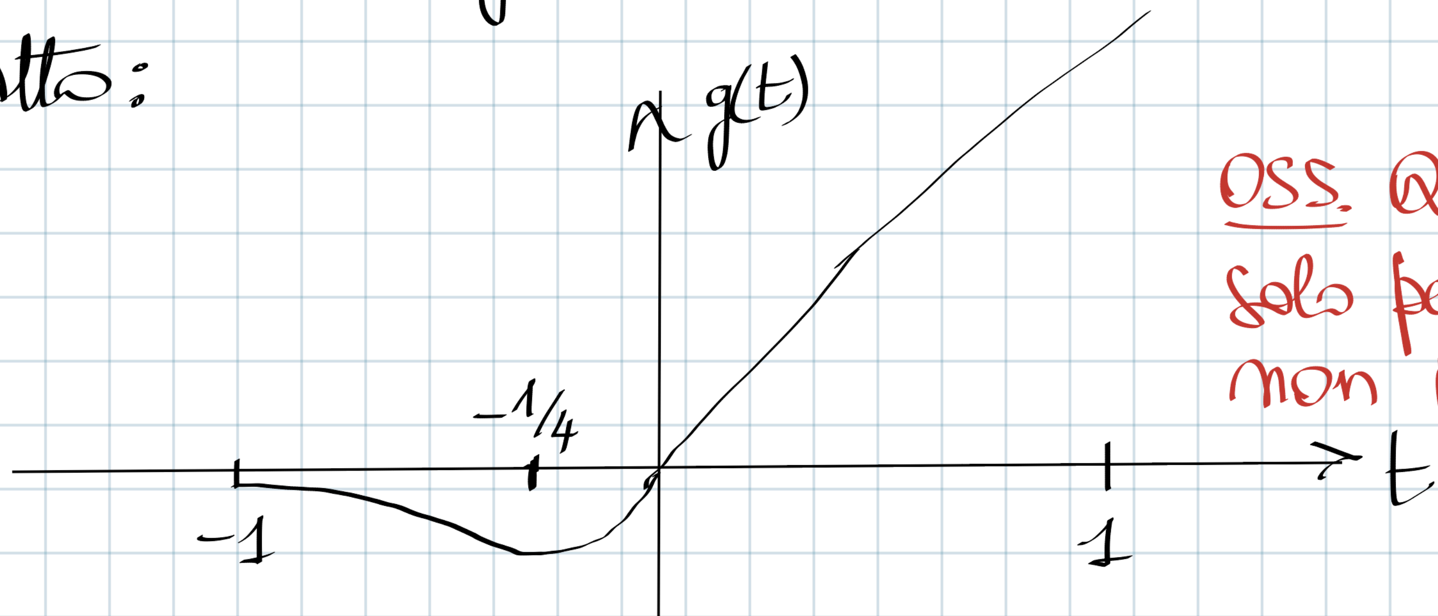
Poiche ∂E può essere parametrizzato come $(2\cos\theta, 2\sen\theta)$, si tratta di trovare max. e minimo di

$$\varphi(\theta)=f(2\cos\theta, 2\sen\theta)= e^{4(\cos^2\theta-\sen^2\theta)}\quad 16(\cos^4\theta-\sen^4\theta)$$

cioè $\varphi(\theta) = 16\, e^{4\cos(2\theta)} \cos(2\theta)$

Poiché $\cos(2\theta)$ assume i valori compresi tra -1 e 1, dobbiamo studiare la funzione $g(t) = 16\, t\, e^{4t}$

Uno studio di $g(t)$ mostra che in $[-1,1]$ ha un grafico così fatto:



OSS. Questo grafico è accurato solo per la crescenza e la decrescenza, non per le convessità.

e quindi assume il valore massimo quando $\cos(2\theta) = 1$, cioè

$\theta = k\pi$, cioè $(x,y) = (\pm 2, 0)$. In tal caso $f(\pm 2, 0) = 16 e^4$ (max. assoluto su E)

Invece il valore minimo è assunto per $t = -1/4$, cioè per i seguenti 4 valori di θ: $\theta = \pm \frac{1}{2} \arccos(-1/4)$; $\theta = \pm \frac{1}{2} \arccos(-1/4) + \pi$

Per questi valori f vale $-4e^{-1}$ (min assoluto su E). $\square$

2.3 Esercizio

Calcolare minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = (2x-3)e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

nel cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1. Mostrare che l origine è un estremo relativo per f.

1° parte Dove stanno max. e minimi assoluti?

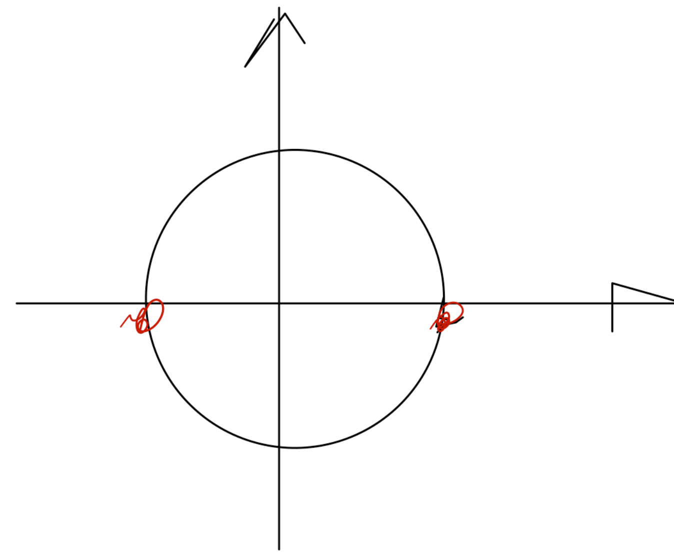
1) Nei pti critici $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

2) Nei pti di sospetta non derivabilità: $(0,0)$

3) sulla frontiera $\Rightarrow f(x,y)\big|_{\partial E} = e(2x-3)$

$(1,0)$ e $(-1,0)$

max. ass. min. assoluto



OSS f non ha derivate parziali in $(0,0)$. Infatti:

$$f_x(0,0) = \frac{d}{dx}\left(f(x,0)\right) = \frac{d}{dx}\left((2x-3)e^{|x|}\right) = \frac{d}{dx}\varphi(x)$$

$$\varphi'(x) = \begin{cases} e^{x}(2+2x-3) & x>0 \\ e^{-x}(2-2x+3) & x<0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^+}\varphi'(x) = -1 = \varphi'_+(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\varphi'(x) = 5 = \varphi'_-(0)$$

$\Rightarrow \varphi$ ha pto angoloso.

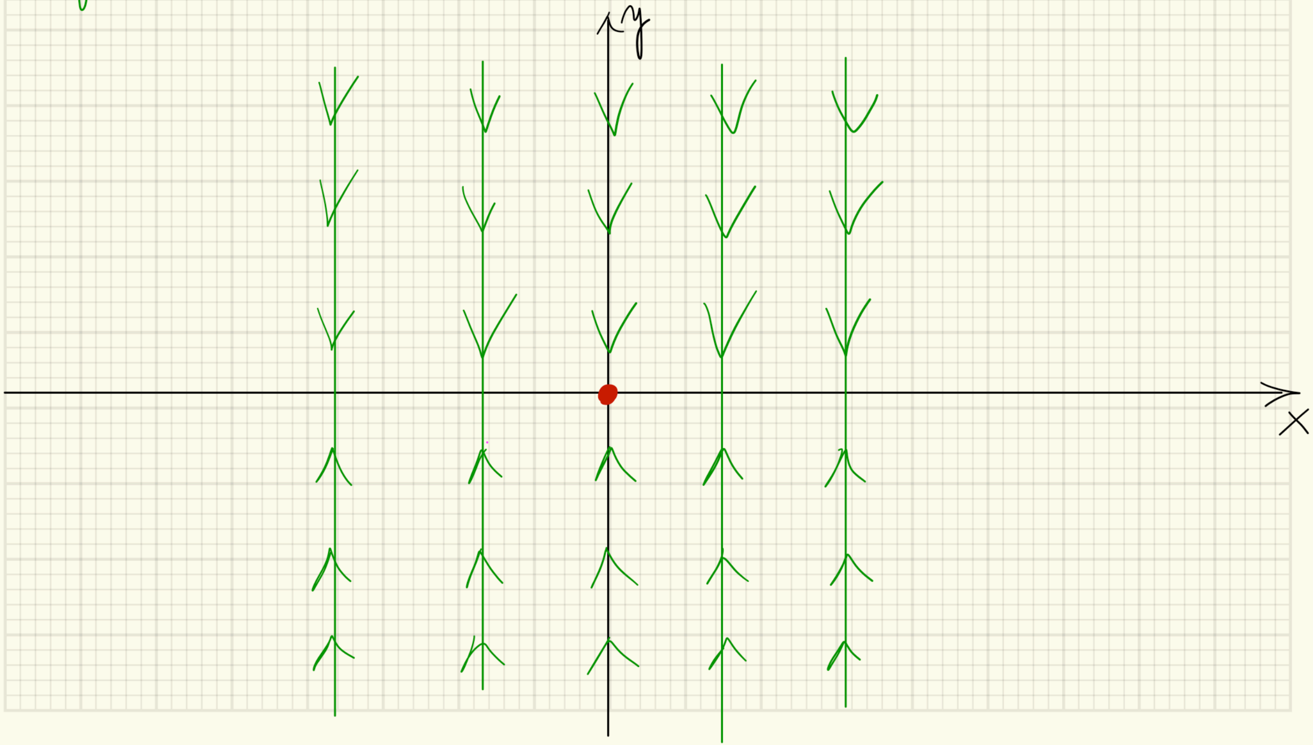
$$f(x,y) = (2x-3)\,e^{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow f_x(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}\left(2 + \frac{(2x-3)\,x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$f_y(x,y) = (2x-3)\,e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

questa quantità è negativa vicino all'origine

Studio il segno di quest'ultima, che è più facile.

Ricordando il significato di f_y come tasso di crescenza/decrescenza lungo le rette verticali, si ottiene un andamento come segue.
(le frecce verdi indicano il verso di "salita")

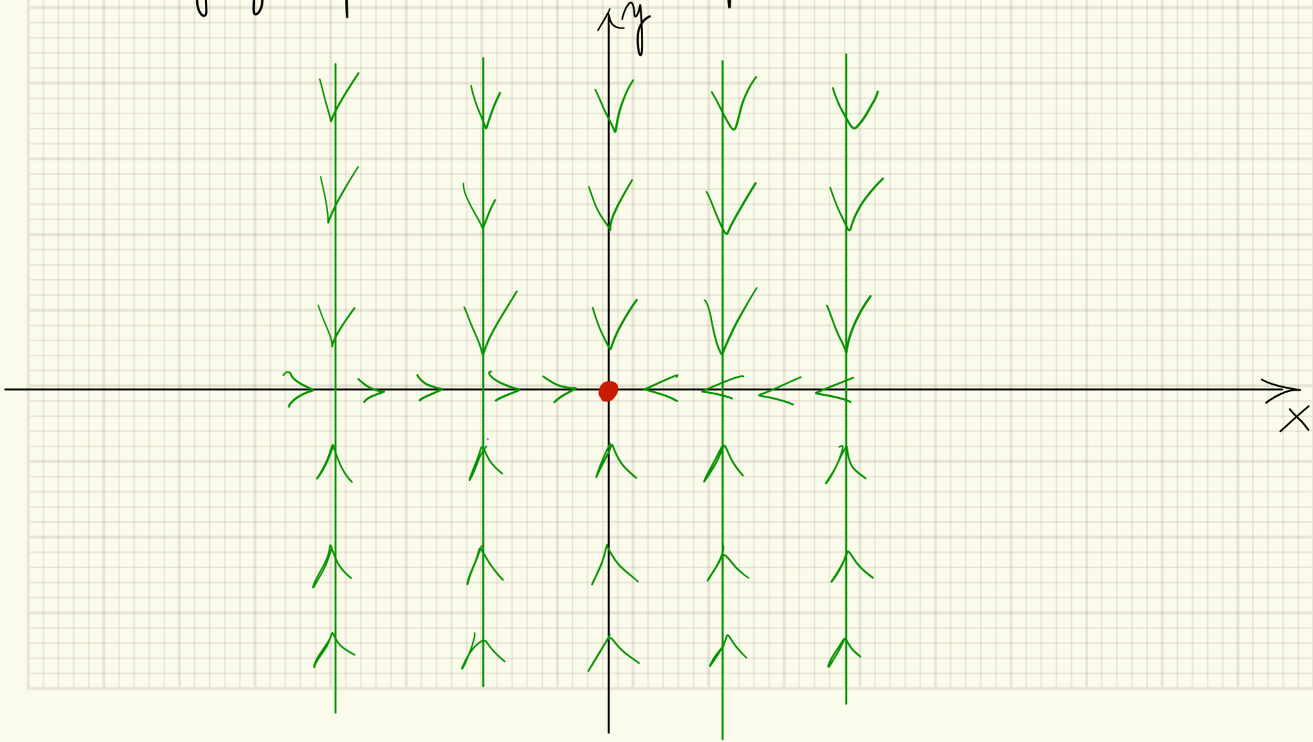


Quindi l'asse x è un "crinale". Ora studio $f(x)$ lungo l'asse x.

Si ha $f(x, 0) = \varphi(x)$, già studiata prima.

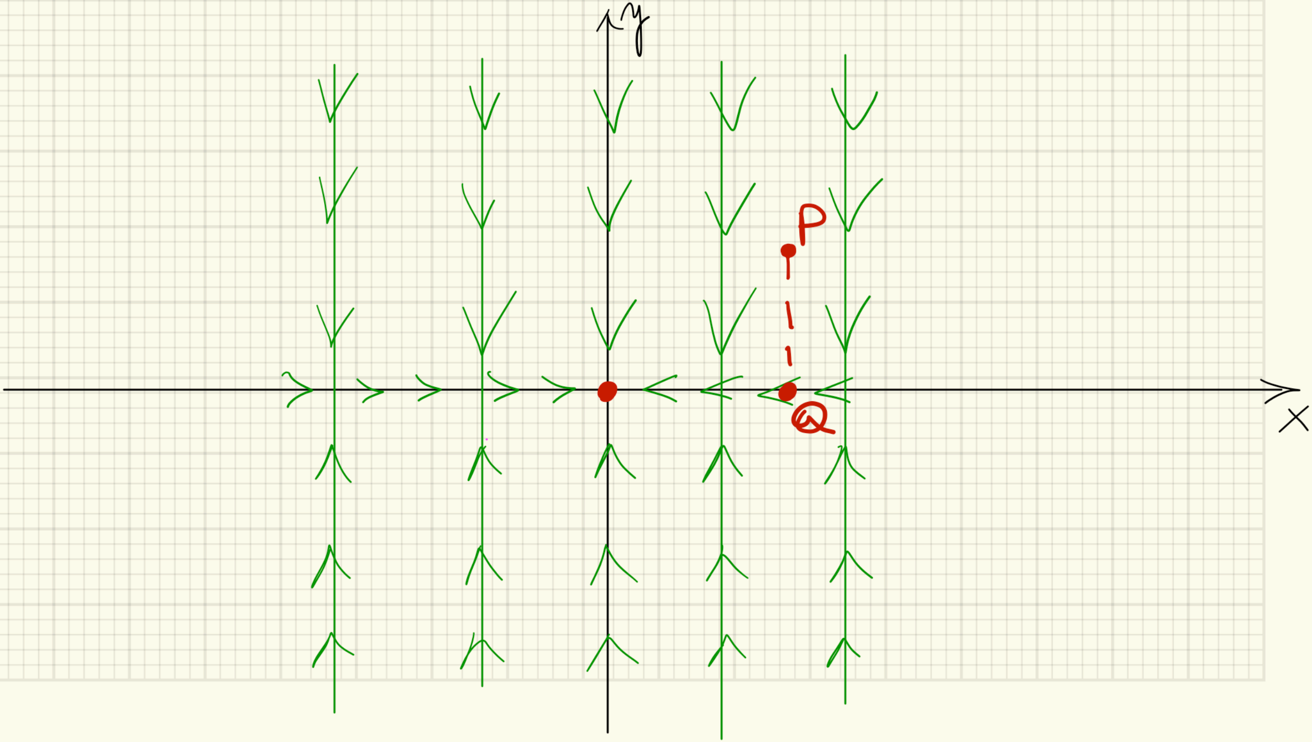
Abbiamo visto che φ cresce a sx dell'origine, decresce a dx.

Quindi il grafico precedente si completa così:



Ne segue che $(0,0)$ è un punto di max. relativo. Infatti, preso un punto $P(x,y)$ in un intorno di $(0,0)$ (basta che sia $2x-3<0$) si ha:

$$f(P) < f(Q) < f(0,0).$$



Altro metodo: Studio il segno di $f(x,y) - f(0,0) =$

$(2x-3)e^{\sqrt{x^2+y^2}} + 3 \leq 0$ per (x,y) in un intorno di $(0,0)$

$$(2x-3)e^{\sqrt{x^2+y^2}} + 3 \leq \left(2\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)e^{\sqrt{x^2+y^2}} + 3 = \underbrace{(2\rho-3)e^{\rho} + 3}_{g(\rho)}$$

$x \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$g(\rho) \leq 0$ per $0 < \rho < \delta$. Infatti

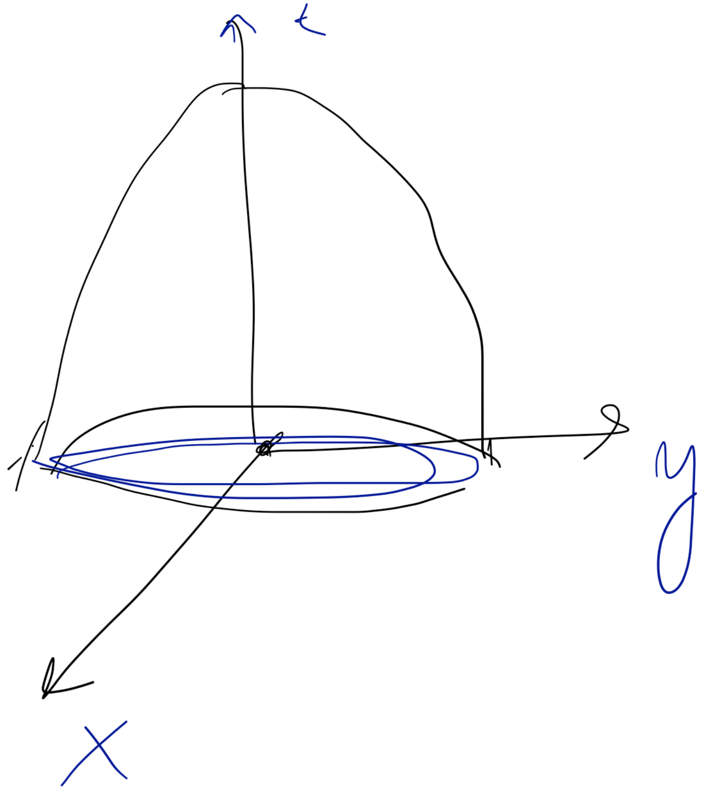
$g(0) = 0$, $g'(\rho) = e^{\rho}(2 + 2\rho - 3) = e^{\rho}(2\rho - 1) < 0$ se $0 < \rho < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow g(\rho) < 0$ se $0 < \rho < \frac{1}{2}$

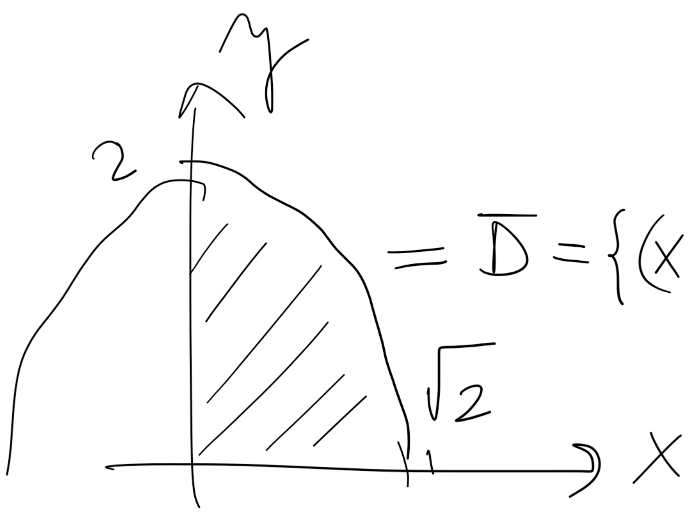
2.17 Esercizio

Tra tutti i parallelepipedi aventi gli spigoli paralleli agli assi coordinati di $\mathbb{R}^3$ e due vertici opposti nei punti $(0,0,0)$ e $(x,y,z) \in \Sigma$, con $\Sigma = \{[x,y,z) \in (0,+\infty)^3 : z = 4 - 2x^2 - y^2\}$, si trovi il parallelepipedo di volume massimo.

$$z = 4 - x^2 - y^2$$



$$\begin{cases} 4 - 2x^2 - y^2 > 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \qquad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} < 1$$



$$= \bar{D} = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Massimizzare $V(x,y) = xy(4 - 2x^2 - y^2)$

$$V(x,y) = xy(4-2x^2-y^2)$$

OSS $V(x,y)$ (continua!) ammette max. assoluto in $\overline{D}$. Tale massimo non può stare su ∂D, perché lì vale zero!

$$V_x(x,y) = y(4-2x^2-y^2-4x^2) = y(4-6x^2-y^2) = 0$$

$$V_y(x,y) = x(4-2x^2-y^2-2y^2) = x(4-2x^2-3y^2) = 0$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x(4-2x^2)=0 \end{cases} \Rightarrow x=0, \quad x=\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} 4-6x^2-y^2=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 2$$

$$\begin{cases} 4-6x^2-y^2=0 \\ 4-2x^2-3y^2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x^2+y^2=4 \\ 2x^2+3y^2=4 \quad \times 3 \end{cases}$$

$$6x^2+9y^2=12$$

$$8y^2=8 \quad y=1$$

$$2x^2=4-3 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ max. assoluto

$$V_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \cdot (4-1-1) = \sqrt{2}.$$

2.19 Esercizio (*)

Una funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ si dice **coercitiva** se

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \to +\infty} f(\mathbf{x}) = +\infty,$$

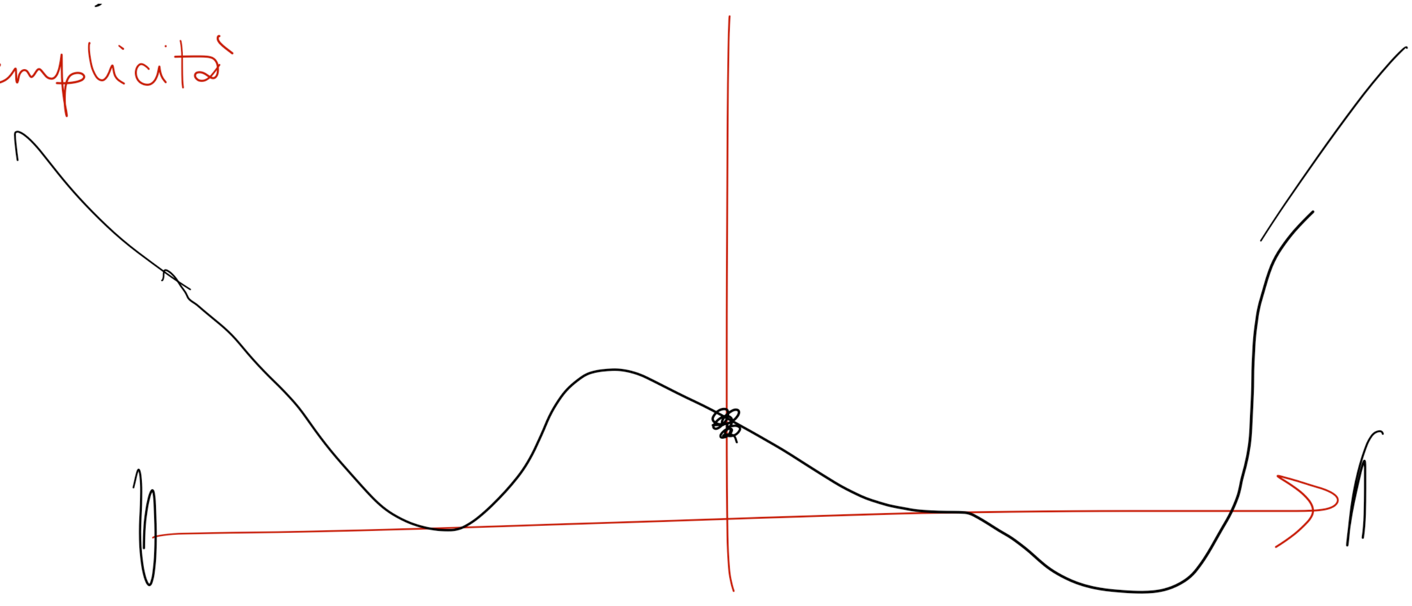
cioè se per ogni $M > 0$ esiste un $K > 0$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ verificante $\|\mathbf{x}\| > K$ si ha $f(\mathbf{x}) > M$.

Dimostrare la seguente variante del Teorema di Weierstrass:

Teorema: Ogni funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua e coercitiva ammette minimo assoluto in $\mathbb{R}^N$.

(Suggerimento: ricondursi al Teorema di Weierstrass in una palla chiusa e limitata)

$N = 1$ per semplicità



Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un pto qualsiasi, per es $x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = f(0)$

Per la "coercitività", $\exists\, [a,b]$ t.c. $\forall x \notin (a,b)$ $f(x) > f(x_0)$

Applico Weierstrass all'intervallo $[a,b] \Rightarrow \exists$ min. assoluto su $[a,b]$

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in [a,b]$ t.c. $f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

se $x \notin [a,b] \Rightarrow f(\bar{x}) \leq f(0) < f(x)$

$\Rightarrow f(\bar{x}) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\square$

La generalizzazione a $\mathbb{R}^N$ è molto facile.
Infatti, calcolato $f(\underline{0})$, esisterà una palla centrata nell'origine B_R fuori della quale $f(\underline{x}) > f(\underline{0})$. Come prima, troviamo il minimo assoluto di f in B_R. Tale minimo sarà anche minimo assoluto in tutto $\mathbb{R}^N$. $\square$

2.20 Esercizio

Utilizzando il teorema enunciato nel precedente esercizio, provare che la funzione

$$\text{Sia } S(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - A|^2 + |\mathbf{x} - B|^2 + |\mathbf{x} - C|^2, \text{ dove } A(1,1), B(2,0), C(1,-1)$$

ammette un minimo assoluto in $\mathbb{R}^2$, e trovarlo.

$$\underline{x} = (x, y)$$

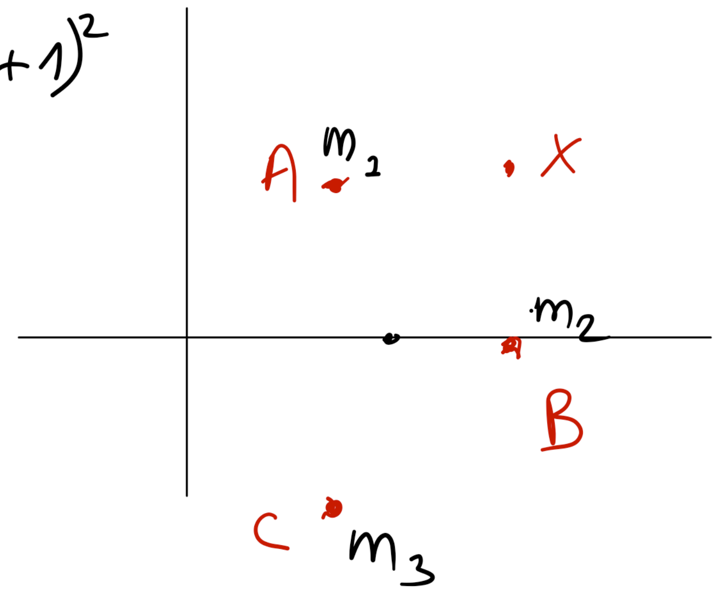
$$S(\underline{x}) = \|\underline{x} - A\|^2 + \|\underline{x} - B\|^2 + \|\underline{x} - C\|^2 =$$

$A = (1, 1)$, $B = (2, 0)$

$C = (1, -1)$

E' intuitivo (ma andrebbe dimostrato!) che S è coercitiva.

$$= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-2)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2$$



$$S_x(x,y) = 2(x-1) + 2(x-2) + 2(x-1)$$

$$S_y = 2(y-1) + 2y + 2(y+1)$$

$$3x = (1+2+1) \qquad x = \frac{1+2+1}{3}$$

$$3y = (1+0-1) \qquad y = \frac{1+0-1}{3} = 0$$

Notare che il punto trovato è il baricentro dei tre punti A, B, C.

In effetti il problema studiato ha la seguente interpretazione fisica: Dati i 3 punti A, B, C, con massa unitaria, trovare il punto del piano rispetto al quale il momento di inerzia $S(x)$ dei tre punti è minimo. Come è noto, tale punto è il baricentro dei 3 p.ti!

GENERALIZZAZIONE

Se consideriamo K punti $\underline{P}_1, \underline{P}_2 \dots \underline{P}_K$, dotati risp. di massa $m_1, \dots m_K$, il momento d'inerzia rispetto a $\underline{x}$ vale

$$S(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{K} m_i \|\underline{x} - \underline{P}_i\|^2,$$

e questo è minimo quando

$$\underline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{K} m_i \underline{P}_i}{\sum_{i=1}^{K} m_i},$$

cioè ancora il baricentro del sistema.

OSS Questo funziona in ogni dimensione!