VENERDÌ 16/10 LA LEZIONE SI TERRÀ
A VIA DEL CASTRO LAURENZIANO (Aule di Ingegneria)
dalle 10:15 precise (aula 8).
A seguire, ricevimento studenti.

CURVE DI PUNTI CRITICI

DEF Si dice CURVA REGOLARE una funzione $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ di classe $C^1([a,b])$ (a volte basterà $C^0([a,b]) \cap C^1(a,b)$)

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

di classe C^1

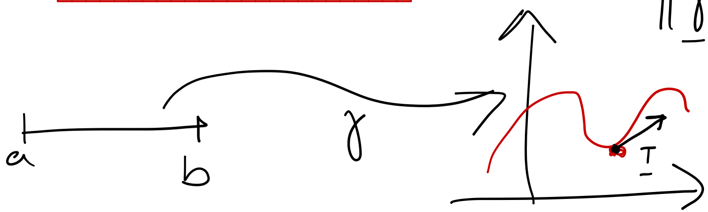
$$t \longmapsto \underline{\gamma}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$$

queste componenti non possono annullarsi tutte insieme

t.c. $\forall t \in (a,b)$ $\quad \underline{\gamma}'(t) \neq \underline{0}$, cioè $(x_1'(t), \dots x_N'(t)) \neq \underline{0}$

OSS. La condizione $\gamma'(t) \neq \underline{0}$ assicura che esiste il $\boxed{\text{versore tangente}}$

$$\underline{T}(t) = \frac{\underline{\gamma}'(t)}{\|\underline{\gamma}'(t)\|}$$

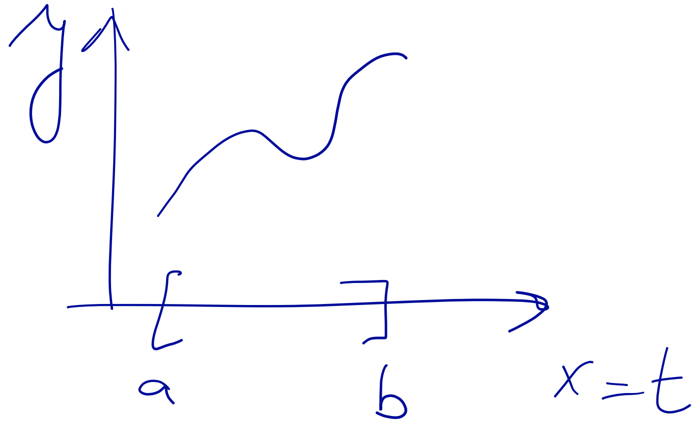


ESEMPI curve grafico

$f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1.

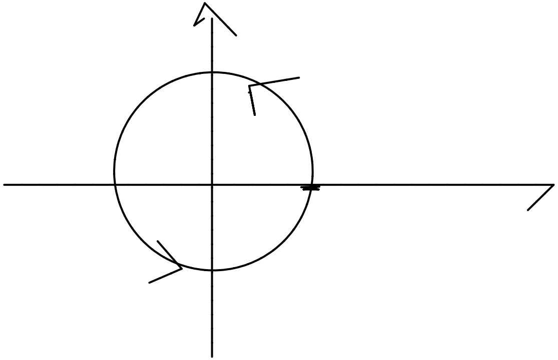
Ad essa si può associare la curva grafico in $\mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases} \qquad x'(t) = 1 \neq 0$$
$$t \longmapsto (t, f(t))$$



2) CIRCONFERENZA

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi] \qquad R>0 \text{ fissato.}$$



DEF $\mathrm{Im}(\gamma) \subset \mathbb{R}^N$ si dice "sostegno" della curva

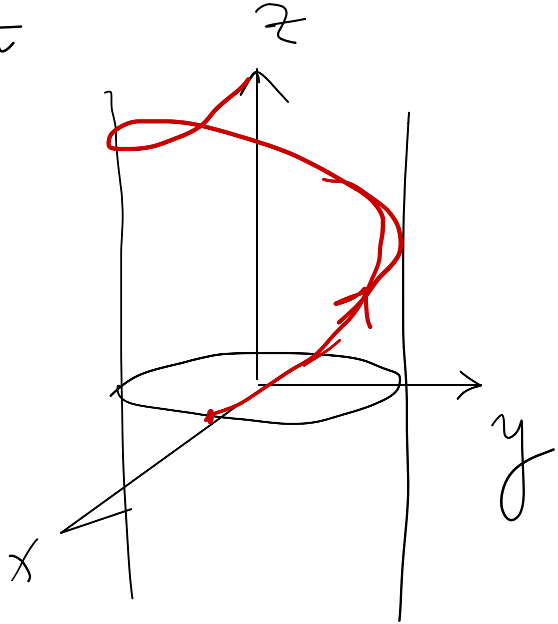
Curve diverse possono avere lo stesso sostegno.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \qquad \text{con } a, b > 0 \Rightarrow \text{ellisse}$$

3) <u>Elica cilindrica</u>

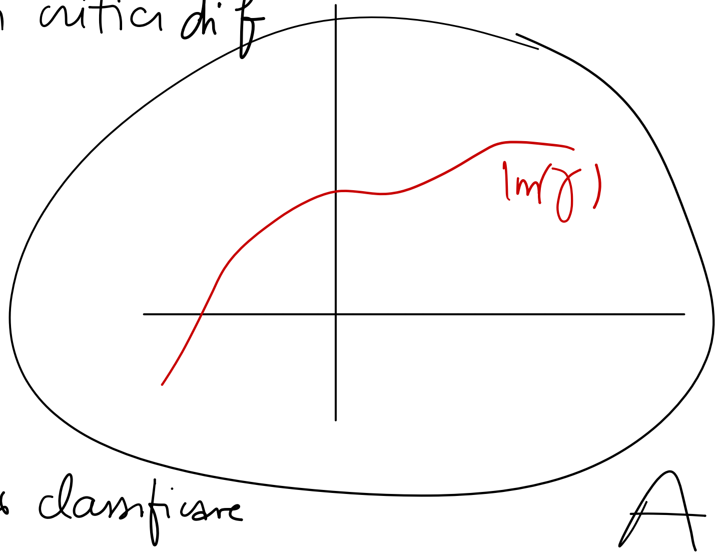
$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = at \end{cases}$$

$R, a > 0$ $\quad t \in [a, b]$



CURVE DI PUNTI CRITICI

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $C^2(A)$, A aperto.
$\gamma : [a,b] \to A \subset \mathbb{R}^2$, e supponiamo che il sostegno di γ sia tutto fatto di punti critici di f



Allora:

1) f è costante sul sostegno di γ.

2) $\det D^2 f = 0$ sul sostegno di γ.

↳ $D^2 f$ è inutile per classificare i p.ti critici.

Dim 1) Hyp $\nabla f(\underline{\gamma}(t)) \equiv 0$ $\quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$\frac{d}{dt}\left(f(\underline{\gamma}(t))\right) = \underbrace{\nabla f(\underline{\gamma}(t))}_{=0} \cdot \underline{\gamma}'(t) = \underbrace{f_x(x(t), y(t))}_{=0} x'(t) + \underbrace{f_y(x(t), y(t))}_{=0} y'(t) = 0 \quad \forall t$$

$\Longrightarrow f(\underline{\gamma}(t)) \equiv$ costante $\square$

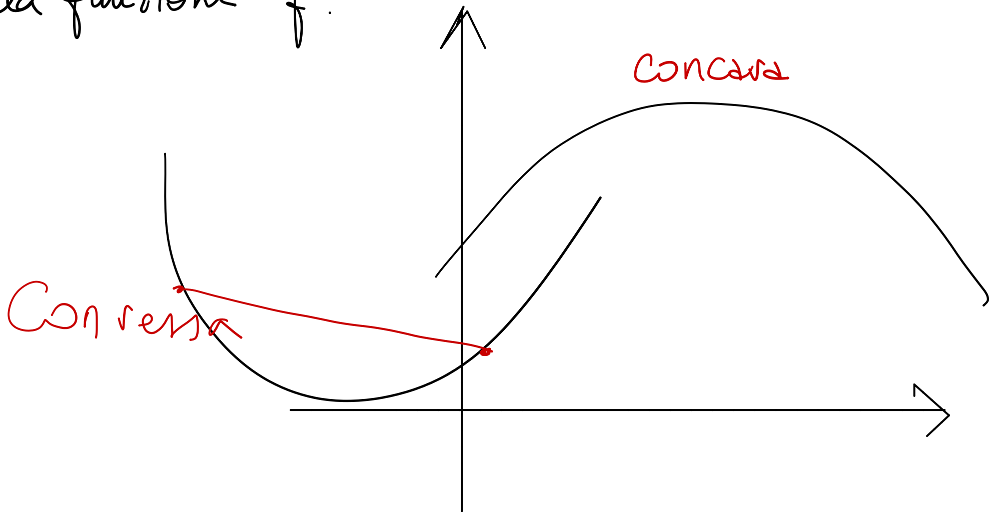
Dim 2) Hyp $f_x(\gamma(t)) \equiv 0 \quad f_y(\gamma(t)) \equiv 0$

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{d}{dt} f_x(\gamma(t)) = f_{xx}(\underline{\gamma}(t))\, x'(t) + f_{xy}(\gamma(t))\, y'(t) = 0 \\ 0 &\equiv \frac{d}{dt} f_y(\underline{\gamma}(t)) = f_{xy}(\underline{\gamma}(t))\, x'(t) + f_{yy}(\underline{\gamma}(t))\, y'(t) = 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

OSS $(x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$ per ipotesi di curva regolare. Ne segue che il sistema lineare omogeneo di 2 eq. nelle 2 "incognite" $x'(t), y'(t)$ ha una soluz. $\neq (0,0) \Longrightarrow$ il det. dei coeff.ti vale zero $\Rightarrow \det(D^2 f(\underline{\gamma}(t))) \equiv 0$ $\square$

SIGNIFICATO DELLA MATRICE HESSIANA $(N=2)$

In dim 1 $(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ la $f''(x)$ è legata alla concavità o convessità della funzione f.



FUNZIONI CONVESSE DI 2 VARIABILI

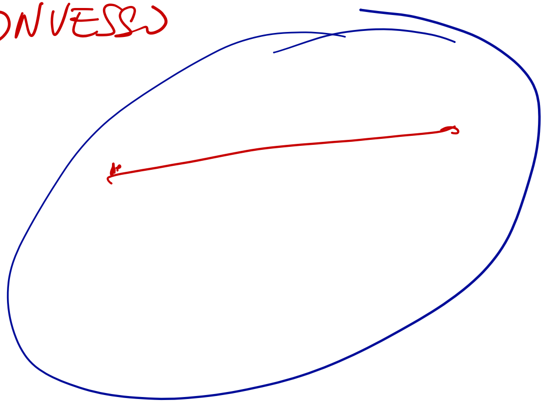
$f: A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ A convesso

A si dice convesso se $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$, il segmento di estremi $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ è interamente contenuto in A

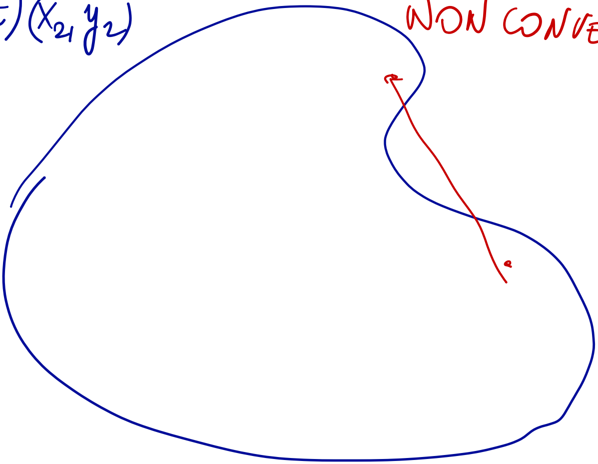
$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A \quad \forall t \in (0,1) \quad (t x_1 + (1-t) x_2 , t y_1 + (1-t) y_2) \in A$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t(x_1,y_1) + (1-t)(x_2,y_2)$

CONVESSO



NON CONVESSO



OSS In $\mathbb{R}$ i convessi sono tutti e soli gli intervalli:

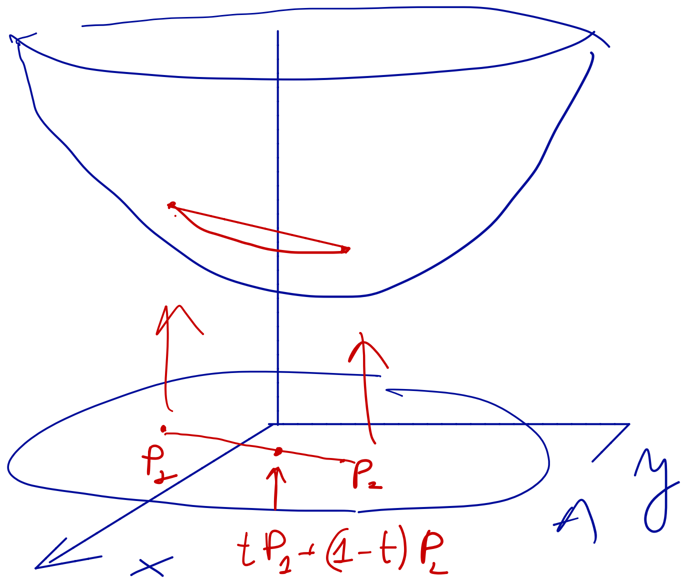
DEF $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A convesso.

concava

f si dice convessa in A se

$\forall P_1 = (x_1, y_1) \in A,\ \forall P_2(x_2, y_2) \in A,\ \forall t \in (0,1)$

$$f(tP_1 + (1-t)P_2) \underset{\geq}{\leq} t f(P_1) + (1-t) f(P_2)$$



CRITERIO DI CONVESSITÀ PER FUNZIONI C^1)

TEOREMA $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ A aperto convesso, di classe C^1

f è convessa (concava) in A $\iff$ $\forall (x,y),(x_0,y_0) \in A$

$$f(x,y) \geq (\leq) f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x-x_0, y-y_0)$$

In forma vettoriale

$$f(\underline{\xi}) \geq f(\underline{\xi}_0) + \nabla f(\underline{\xi}_0) \cdot (\underline{\xi} - \underline{\xi}_0)$$

cioè: il grafico di f sta tutto sopra (sotto) di suoi piani tangenti.

(S.d.)

CRITERIO DI CONVESSITÀ PER FUNZIONI C^2:

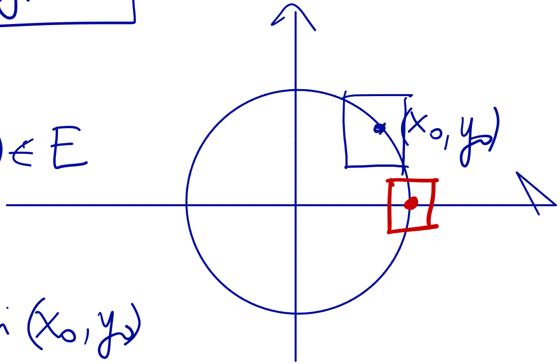
Ipotesi come prima, ma $f \in C^2(A)$.

Allora f è ~~convessa~~ concava in A se e solo se la matrice Hessiana $D^2 f(x,y)$ è semidef.ta ~~positiva~~ negativa $\forall (x,y) \in A$

TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE: il contesto

$f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ regolare (per es. C^1)

Consideriamo l'equazione $\boxed{f(x,y)=0}$



Esempio 1 $f(x,y) = x^2+y^2-1=0$

Supponiamo di fissare un pto $(x_0,y_0) \in E$

$(x_0,y_0) \in E = \{(x,y): \ f(x,y)=0\}$

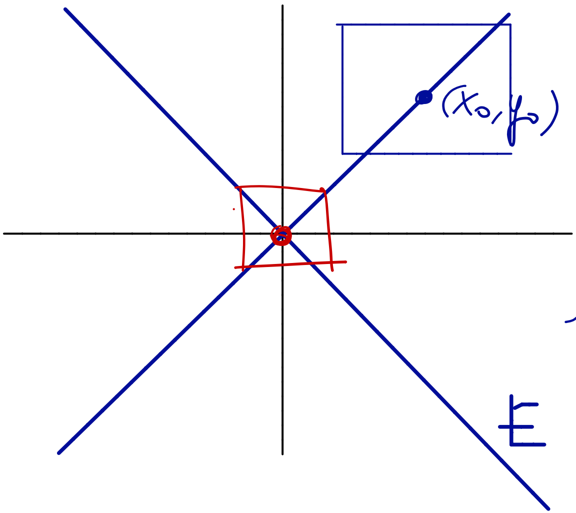
Mi chiedo se almeno in un intorno di (x_0,y_0) l'insieme E sia il grafico di una funzione $y=\varphi(x)$

In questo caso, se $(x_0,y_0) \neq (\pm 1, 0)$, φ è nota: $\pm\sqrt{1-x^2}$

In tale intorno $(x,y) \in E \Leftrightarrow f(x,y)=0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$

La stessa cosa si può fare a variabili invertite $x = \psi(y)$
se $(x_0,y_0) \neq (0, \pm 1)$

2) $f(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow E = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$



$(x_0, y_0) \in E$

se $(x_0, y_0) \neq (0,0)$

$\exists$ un intorno rettangolare di (x_0, y_0) in cui

$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$

Altri casi da considerare:

3) $f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow E$ si riduce al solo punto $(0,0)$

$\Rightarrow$ non è un grafico nemmeno localmente.

4) $f(x,y) \equiv 0$. In tal caso E è tutto il piano $\mathbb{R}^2$.

Anche in questo caso non è un grafico.

Vedremo nella prossima lezione che la condizione che ci assicura che E sia un grafico di una $y = \varphi(x)$ oppure di una $x = \psi(y)$, almeno in un intorno di (x_0, y_0), è che $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$.