da fare!

La prima parte l'avevamo già fatta.

4. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = 4x^2 - 4y^3 + 4xy^2 - 7x\,.$$

Successivamente, dire se esistono massimo e minimo assoluti nel primo quadrante $(0,+\infty) \times (0,+\infty)$.

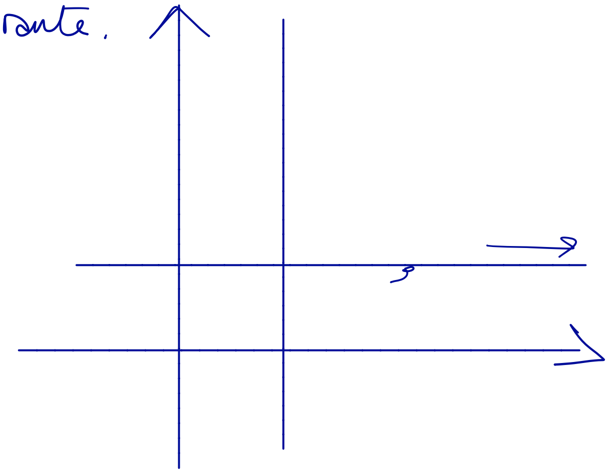
Sulla retta $y=1$ la funzione vale $f(x,1) = 4x^2 - 4 - 3x$ per $x \to +\infty$ tende a $+\infty$

$\Rightarrow$ f è illimitata superiormente nel 1° quadrante.

Per vedere che è illimitata inferiormente, si può prendere la retta verticale $x = 1$

$$f(1,y) = 4 - 4y^3 + 4y^2 - 7 \xrightarrow{y \to +\infty} -\infty$$

$\Rightarrow$ max e min. assoluti non esistono.



Esercizio

Calcolare e classificare i punti critici di

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 2x + 2y + 1$$

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = 6x - 2z + 2 = 0 \\ f_y(x,y,z) = 4y + 2 = 0 \\ f_z(x,y,z) = 2z - 2x = 0 \end{cases}$$

La prima parte l'avevamo fatta all'ultima lezione

$x = -\frac{1}{2} = z$

$y = -\frac{1}{2}$

$z = x$

Unico pto critico $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$f_{xx}(x,y,z) = 6$; $f_{xy}(\cdot\cdot) = 0$; $f_{xz}(\cdot\cdot) = -2$

$f_{yy}(\ ) = 4$; $f_{yz}(\cdot\cdot) = 0$

$f_{zz}(\ ) = 2$

$$D^2 f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Eq.^{ne} caratteristica

$$\det \begin{bmatrix} 6-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

L'ultima volta eravamo arrivati qui

$$(6-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda) - 4(4-\lambda) = 0$$

$$(4-\lambda)\left[(6-\lambda)(2-\lambda) - 4\right] = 0$$

$$(4-\lambda)\left[\lambda^2 - 8\lambda + 8\right] = 0$$

$$\lambda = 4 \pm \sqrt{16-8}$$ radici tutte positive

$\Rightarrow D^2 f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ def^{ta} positiva

$\Rightarrow$ il pto è di min. relativo stretto.

$\square$

Trovare e classificare i punti critici di

$$f(x,y) = x^2 y^3 (6-x-y)$$

$$f_x(x,y) = y^3\left[2x(6-x-y) - x^2\right] = xy^3(12-2x-2y-x) = xy^3(12-3x-2y)$$

$$f_y(x,y) = x^2\left[3y^2(6-x-y) - y^3\right] = x^2y^2\left[18-3x-3y-y\right]$$

$$= x^2y^2\left[18-3x-4y\right]$$

$\boxed{\text{Ricerca pti critici}}$

$$\begin{cases} xy^3(12-3x-2y) = 0 \\ x^2y^2(18-3x-4y) = 0 \end{cases}$$

Tutti i punti degli assi cartesiani sono critici!

$$\begin{cases} 3x+2y = 12 \\ 3x+4y = 18 \end{cases} \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = \frac{12-2y}{3} = 2 \qquad (2,3)$$

$$f_x(x,y) = y^3\left[2x(6-x-y) - x^2\right] = xy^3(12-2x-2y-x) = xy^3(12-3x-2y)$$

$$f_y(x,y) = x^2\left[3y^2(6-x-y) - y^3\right] = x^2y^2\left[18-3x-3y-y\right]$$

$$= x^2y^2\left[18-3x-4y\right]$$

$$f_{xx}(x,y) = y^3\left[\cancel{(12-3x-2y)}-3x\right] = y^3\left[12-6x-2y\right]$$

$$f_{xy}(x,y) = x\left(3y^2\cancel{(12-3x-2y)} - 2y^3\right)$$

$$f_{yy}(x,y) = x^2\left[2y\cancel{(18-3x-4y)} - 4y^2\right]$$

in $(2,3)$

$$D^2 f(2,3) = \begin{bmatrix} -162 & 108 \\ 108 & -144 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow (2,3)$ p.to di max. relativo.

Sui punti degli assi l'hessiano è del tipo

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{matrice semidef}^{\text{ta}} \text{ (positiva o negativa)}$$

$\Rightarrow$ non si può dire nulla.

in $(\breve{2},3)$

$$D^2 f(2,3) = \begin{bmatrix} -162 & -108 \\ -108 & -144 \end{bmatrix}$$

$$\det D^2 f = 162 \cdot 144 - 108^2 > 0$$

$-162 < 0 \implies (2,3)$ è di max. relativo.

$$f(x,y) = x^2 y^3 (6-x-y)$$

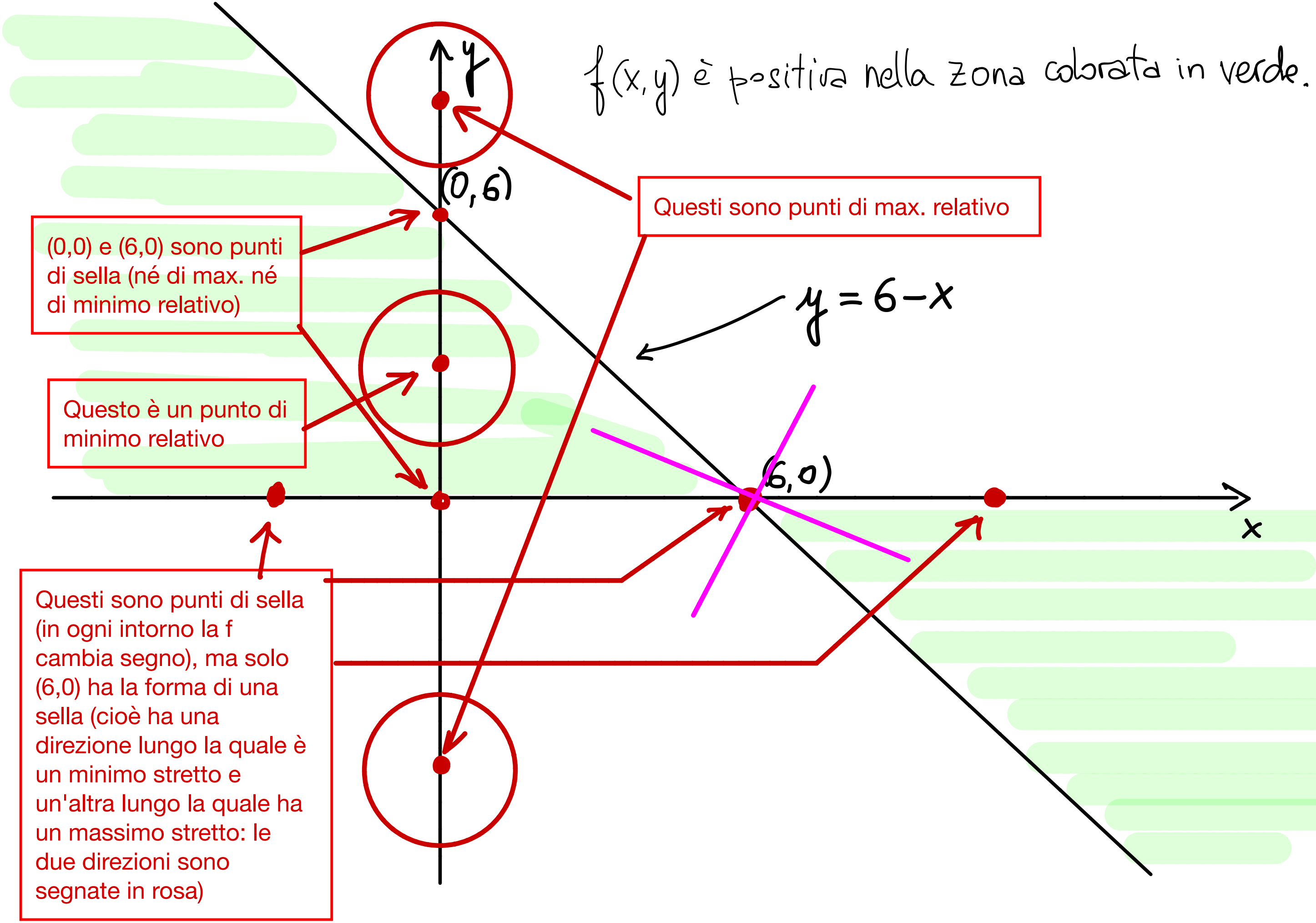
Sugli assi è nulla.

Studio il segno di f.

$x^2 > 0$ per $x \neq 0$

y^3 ha il segno di y

$6-x-y>0$ è un semipiano.



f(x,y) è positiva nella zona colorata in verde.
y
x
(0,6)
(6,0)
y = 6 − x
Questi sono punti di max. relativo
(0,0) e (6,0) sono punti di sella (né di max. né di minimo relativo)
Questo è un punto di minimo relativo
Questi sono punti di sella (in ogni intorno la f cambia segno), ma solo (6,0) ha la forma di una sella (cioè ha una direzione lungo la quale è un minimo stretto e un'altra lungo la quale ha un massimo stretto: le due direzioni sono segnate in rosa)

Conclusioni:

I punti dell'asse x non sono né di max. né di min

I punti dell'asse y $(0,y)$:

1) se $y<0 \vee y>6$, $(0,y)$ pto di max. relativo

2) se $0<y<6 \Rightarrow (0,y)$ pto di min. relativo.

3) $(0,0)$ e $(0,6)$ né max né min.

$$\boxed{f(x,y) = x^8 - 2x^4y + y^3 - y \text{ : trovare e classificare i pti critici}}$$

$$f_x(x,y) = 8x^7 - 8x^3y$$

$$f_y(x,y) = -2x^4 + 3y^2 - 1$$

$$\begin{cases} 8x^3(x^4 - y) = 0 \\ -2x^4 + 3y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$\leftarrow$ cerco i pti critici

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 = y \\ 3y^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \begin{cases} \cancel{-1/3} \\ 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$$f_{xx}(x,y) = 56x^6 - 24x^2y$$

$$f_{xy}(x,y) = -8x^3$$

$$f_{yy}(x,y) = 6y$$

I punti (1,1) e (-1,1) si classificano facilmente con l'Hessiano.

Concentriamoci sul punto $P_1\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

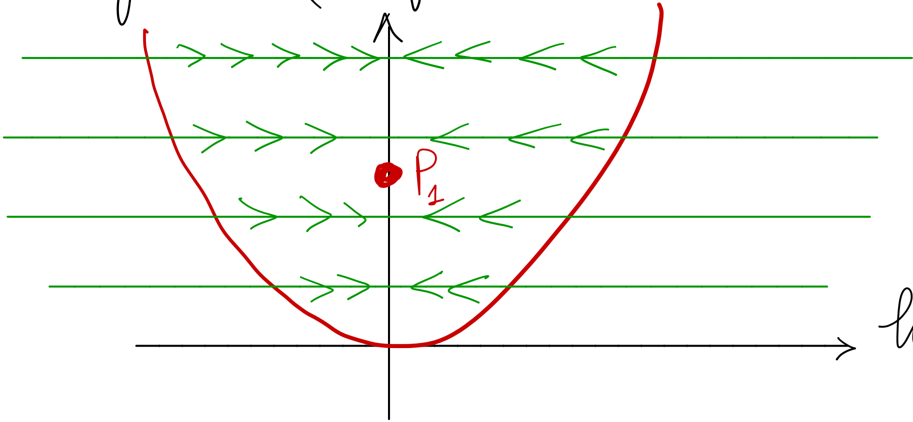
Poiché $D^2 f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$, l'hessiano non risolve il problema.

Studiamo quindi il segno di

$$f_x(x,y) = 8x^3 \underbrace{(x^4 - y)}$$

questo è negativo in un intorno del p.to

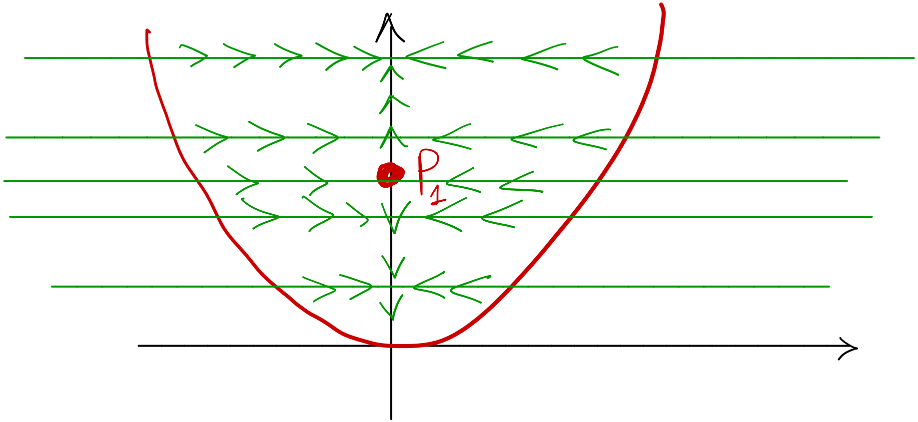
Quindi, ricordando il significato di f_x come tasso di crescenza/ /decrescenza lungo le rette orizzontali, si ottiene l'andamento seguente (le frecce indicano il verso di "salita").



Quindi l'asse y, vicino al punto P_1 risulta un "crinale". Ora studiamo la f lungo tale "crinale".

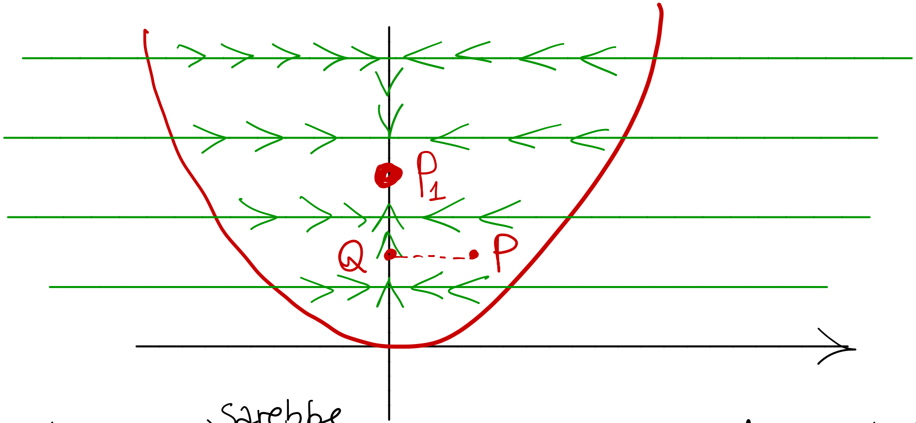
Si ha: $f(0,y) = y^3 - y =: \varphi(y)$.

Studiando questa funzione, si ottiene il seguente andamento:



Quindi P_1 è un punto di sella (massimo lungo la retta orizzontale, minimo lungo la retta verticale.)

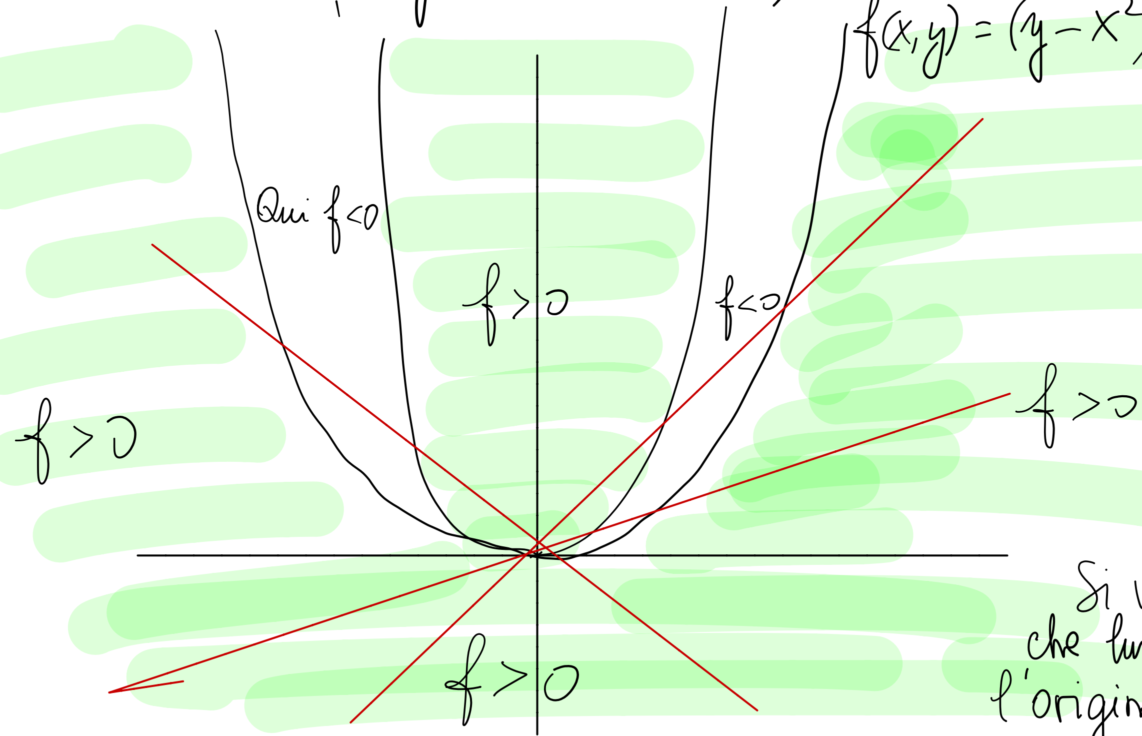
E se fosse stato così?



In questo caso P_1 sarebbe un punto di massimo relativo. Infatti, preso un qualsiasi punto P sopra la curva rossa $y = x^4$, si avrebbe
$$f(P) \leq f(Q) \leq f(P_1) \quad \text{(vedi figura)}$$

Esempio di una funzione avente un punto che è minimo rel. stretto lungo tutte le rette, ma non è minimo relativo

$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$$



Si vede facilmente che lungo tutte le rette l'origine è un min. locale, ma in ogni intorno di $(0,0)$ ci sono punti dove $f<0$!