UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
- Facoltà di Farmacia e Medicina -
Corso di Laurea in CTF

1 Equazioni e disequazioni di secondo grado

Siano $a \neq 0$, b e c tre numeri reali noti, risolvere un'**equazione di secondo grado** significa trovare, **se esistono**, i valori di x reali per i quali vale

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ESEMPIO 1

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Osservando che

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \qquad [\text{infatti } (x+1)(x+2) = x^2 + x - 2x - 2 = x^2 - x - 2]$$

si vede facilmente che le soluzioni sono $x = -1$ e $x = 2$
(infatti per due numeri reali α e β si ha $\alpha\beta = 0$ se e solo se $\alpha = 0$ oppure $\beta = 0$
ESEMPIO 2

$$x^2 - 2 = 0$$

Le soluzioni sono $+\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$
ESEMPIO 3

$$x^2 + 2 = 0$$

non ammette soluzioni in quanto per ogni x reale si ha $x^2 \geq 0$ per cui $x^2 + 2 \geq 0 + 2$.
ESEMPIO 4

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Osservando che $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ si vede facilmente che solo $x = 1$ soddisfa l'equazione $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Siano $a \neq 0$, b e c tre numeri reali noti, risolvere una **disequazione di secondo grado** significa trovare, **se esistono**, i valori di x reali per i quali vale

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

(oppure $ax^2 + bx + c \leq 0$)
ESEMPIO 1 BIS

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

Osservando che

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

e ricordando che

$$\alpha\beta \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[\begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \beta \geq 0 \end{cases} \text{oppure} \quad \begin{cases} \alpha \leq 0 \\ \beta \leq 0 \end{cases} \right]$$

si vede facilmente che le soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \text{oppure} \quad \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x-2 \leq 0 \end{cases}$$

Ossia

$$x \geq 2 \qquad \text{oppure} \qquad x \leq -1$$

GRAFICAMENTE si può usare il metodo illustrato nella Figura 1: si studiano i segni di ciascuno dei due fattori $(x+1)$ e $(x-2)$ e si ottiene il segno del prodotto utilizzando le regole "+ per + = +", "+ per - = -" e "- per - = +".

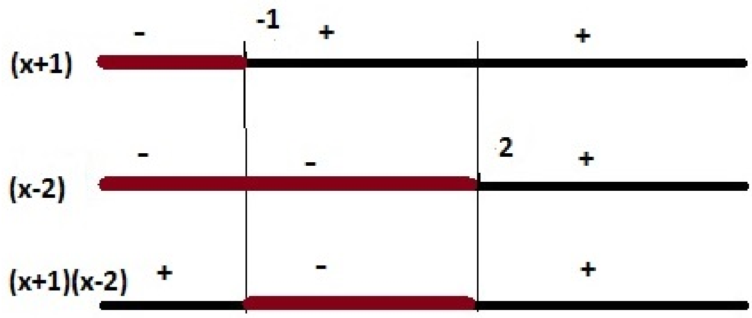

Figure 1: Studio del segno di $(x+1)(x-2)$

ESEMPIO 2 BIS

$$x^2 - 2 \geq 0$$

Le soluzioni dell'equazione corrispondente sono $+\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ e quindi le soluzioni sono date dal sistema

$$\begin{cases} x+\sqrt{2} \geq 0 \\ x-\sqrt{2} \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x+\sqrt{2} \leq 0 \\ x-\sqrt{2} \leq 0 \end{cases}$$

ossia

$$x \geq 2 \qquad \text{oppure} \qquad x \leq -2.$$

ESEMPIO 3 BIS

$$x^2 + 2 \geq 0$$

L'equazione corrispondente non ammette soluzioni reali, in quanto per ogni x reale si ha $x^2 \geq 0$ per cui $x^2 + 2 \geq 0 + 2$. Quindi ogni x reale soddisfa la disequazione, e l'insieme delle soluzioni è tutta la retta reale.
ESEMPIO 4 BIS

$$x^2 - 2x + 1 \leq 0$$

Osservando che $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ si vede facilmente che solo $x = 1$ soddisfa la disequazione $x^2 - 2x + 1 \leq 0$.

ATTENZIONE: Definizione di radice quadrata di un numero positivo. Se $\alpha \geq 0$ allora $\sqrt{\alpha}$ è definito come quel numero β MAGGIORE O UGUALE A ZERO, $\beta \geq 0$, tale che $\beta^2 = \alpha$.
QUINDI LA RADICE QUADRATA DI UN NUMERO MAGGIORE O UGUALE A ZERO È SEMPRE MAGGIORE O UGUALE A ZERO!!!
Ad esempio $\sqrt{4} = 2$ MENTRE SCRIVERE $\sqrt{4} = \pm 2$ È UN ERRORE!!
Invece le soluzioni dell'equazione $x^2 = 4$ sono effettivamente $\pm\sqrt{4} = \pm 2$.
La confusione potrebbe derivare dal fatto che a volte le soluzioni di un'equazione di secondo grado sono dette radici dell'equazione.

COME ARRIVARE ALLA SOLUZIONE GENERALE DELL'EQUAZIONE $ax^2 + c = 0$ (ossia il caso $b = 0$, e, come sempre, $a \neq 0$)

$$ax^2 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + c - c = 0 - c \quad \Leftrightarrow ax^2 = -c \quad \Leftrightarrow \frac{1}{a} ax^2 = \frac{1}{a}(-c) \quad \Leftrightarrow x^2 = \frac{-c}{a}$$

Da questi semplici passaggi otteniamo che vanno distinti due casi, a seconda del segno di $\frac{-c}{a}$

i $\boxed{\frac{-c}{a} \geq 0}$

In questo caso ci sono due soluzioni

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}},$$

o più sinteticamente

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

ATTENZIONE: ovviamente se $\frac{-c}{a} = 0$ in realtà $x_1 = x_2 = 0$: in questo sottocaso si dice che ci sono **due soluzioni coincidenti**.

ii $\boxed{\frac{-c}{a} < 0}$

In questo caso non ci sono soluzioni reali, in quanto, qualunque sia x reale, $x^2 \geq 0$ e quindi è impossibile che $x^2 = \frac{-c}{a}$

NOTA: ovviamente stiamo cercando soluzioni reali. Se introducessimo il numero immaginario $i = \sqrt{-1}$, per il quale $i^2 = (-i)^2 = -1$ allora potremmo dire che ci sono due soluzioni

$$x_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

COME ARRIVARE ALLA SOLUZIONE GENERALE DELL'EQUAZIONE $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) L'idea è riuscire a riscrivere

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}\right]$$

in modo da trasformare l'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

nell'equazione

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}\right] = 0$$

da cui si ottiene (trascurando il fattore $a \neq 0$) in modo del tutto simile al caso precedente

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$$

Tralasciando, per ora, il motivo per cui vale questa uguaglianza, osserviamo che vanno distinti due casi, a seconda del segno di $\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$

i $\boxed{\frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta := b^2 - 4ac \geq 0}$ In questo caso ci sono due soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{ovvero} \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{1}$$

ATTENZIONE: ovviamente se $b^2 - 4ac = 0$ in realtà $x_1 = x_2 == -\frac{b}{2a}$: in questo sottocaso si dice che ci sono **due soluzioni coincidenti**.

Per la verifica di (1) basta osservare che $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$ vale se e solo se

$$x_{1,2}+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}},\quad ossia\quad x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}}.$$

Per ottenere la forma usuale basta notare che

$$\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|2a|}=\begin{cases}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{se } a>0\\ \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}=\mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{se } a<0\end{cases}$$

e quindi (nel caso in cui $a<0$, l'insieme delle soluzioni rimane lo stesso.

ii $\boxed{\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}<0}\quad\Leftrightarrow\quad\Delta:=b^2-4ac<0$

In questo caso non ci sono soluzioni reali, in quanto, per ogni numero y reale, $y^2\geq 0$ e quindi è impossibile che $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}(<0)$.

NOTA: Ovviamente stiamo parlando di soluzioni reali, perché se introducessimo il numero immaginario $i=\sqrt{-1}$, potremmo dire che ci sono due soluzioni complesse $x_1=\frac{-b+i\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}$, $\quad x_2=\frac{-b-i\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}$

MOTIVO PER CUI VALE

$$\boxed{ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right]}$$

e quindi, SE $\Delta = b^2-4ac \geq 0$

$$\boxed{ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\tfrac{b}{2a}\right) - \sqrt{\tfrac{b^2-4ac}{(2a)^2}}\right]\left[\left(x+\tfrac{b}{2a}\right) + \sqrt{\tfrac{b^2-4ac}{(2a)^2}}\right] = a(x-x_1)(x-x_2)}$$

Infatti, essendo $a \neq 0$, possiamo scrivere

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+{\color{blue}2}\,\frac{b}{{\color{blue}2}\,a}x+\frac{c}{a}\right)$$

aggiungendo e sottraendo $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ e ricordando che $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, si ottiene allora

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2+2\,\frac{b}{2a}x{\color{red}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2}+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Arrivati alla precedente espressioni, se $\Delta \geq 0$ basta usare la ben nota uguaglianza

$$\alpha^2-\beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$

con

$$\alpha = x+\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad \beta = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}}$$

Si noti che se $\Delta := b^2-4ac \geq 0$ allora ha senso calcolare $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}}$.

DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO $\boxed{ax^2+bx+c\geq 0.}$

Iniziamo con il considerare il caso in cui ci sono due soluzioni reali e distinte x_1 e x_2, ossia
$\boxed{\text{se } b^2-4ac\geq 0}$
come abbiamo visto questa condizione ci permette di scrivere

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Lo studio del segno di tale espressione si riduce allo studio del segno dei singoli fattori a, $(x-x_1)$ e $(x-x_2)$, come illustrato nella Figura 2, ma, come accennato in seguito, c'è un metodo di rappresentazione che permette di ricordare facilmente lo studio del segno.

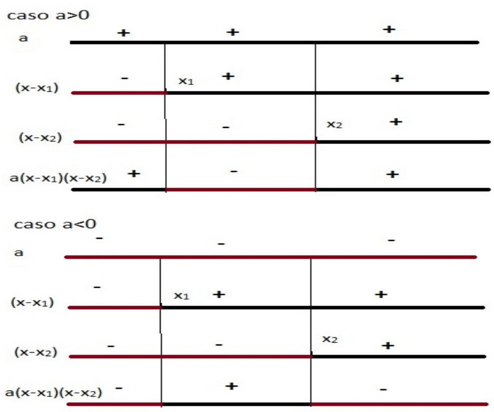

Figure 2: Studio del segno di $a(x-x_1)(x-x_2)$

Riassumendo: $\boxed{\text{se } \Delta=b^2-4ac\geq 0}$ e $\boxed{\text{se } a>0}$

allora $\boxed{a(x-x_1)(x-x_2)\geq 0}$ se e solo se $\boxed{x\leq x_1 \text{ oppure } x\geq x_2}$ ovvero per $\boxed{x\in(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)}$

ed EQUIVALENTEMENTE

allora $\boxed{a(x-x_1)(x-x_2)\leq 0}$ se e solo se $\boxed{x\geq x_1 \text{ e } x\leq x_2}$ ovvero per $\boxed{x_1\leq x\leq x_2}$ ovvero per $\boxed{x\in[x_1,x_2]}$

$\boxed{\text{se } \Delta=b^2-4ac\geq 0}$ e $\boxed{\text{se } a<0}$

allora $\boxed{a(x-x_1)(x-x_2)\leq 0}$ se e solo se $\boxed{x\leq x_1 \text{ oppure } x\geq x_2}$ ovvero per $\boxed{x\in(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)}$

ed EQUIVALENTEMENTE

allora $\boxed{a(x-x_1)(x-x_2)\geq 0}$ se e solo se $\boxed{x\geq x_1 \text{ e } x\leq x_2}$ ovvero per $\boxed{x_1\leq x\leq x_2}$ ovvero per $\boxed{x\in[x_1,x_2]}$

Infine osserviamo che se $b^2-4ac=0$, allora $x_1=x_2$ e quindi $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$ e il segno dipende solo dal segno di a.

Anche nel caso in cui non ci sono due soluzioni reali, ossia
$\boxed{\text{se } \Delta=b^2-4ac<0}$ il segno dipende solo da a, infatti, poiché, abbiamo visto che

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right]$$

quando $\Delta=b^2-4ac<0$, si ha che anche $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}>0$.
Quindi riassumendo

$\boxed{\text{se } \Delta=b^2-4ac<0}$ e $\boxed{\text{se } a>0}$ allora $\boxed{ax^2+bx+c>0 \text{ per ogni } x}$
$\boxed{\text{se } \Delta=b^2-4ac<0}$ e $\boxed{\text{se } a<0}$ allora $\boxed{ax^2+bx+c<0 \text{ per ogni } x}$

PER CAPIRE BENE E MEMORIZZARE, conviene pensare al grafico della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$, ossia all'insieme $\{(x, y)$ tali che $y = ax^2 + bx + c\}$, che è una parabola con la concavità rivolta verso l'alto o verso il basso, a seconda del segno di a (come in Figura 3).

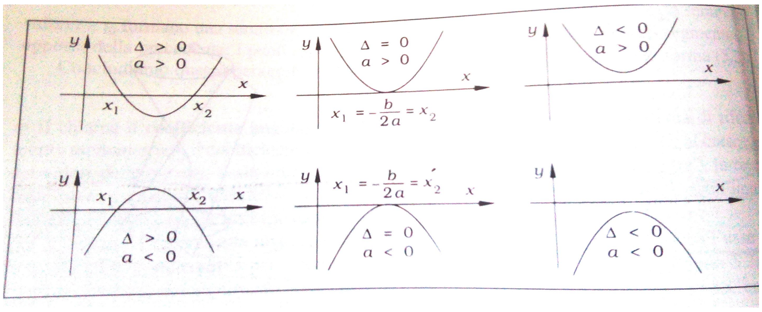

Figure 3: dalla Figura 5.4 del testo di Villani, segno delle parabole

DISUGUAGLIANZE IRRAZIONALI (con le radici quadrate)

Siano $A(x)$ e $B(x)$ due espressioni polinomiali, una disuguaglianza irrazionale è una disuguaglianza del tipo

TIPO I $\boxed{\boldsymbol{A(x) \geq \sqrt{B(x)}}}$

TIPO II $\boxed{\boldsymbol{A(x) \leq \sqrt{B(x)}}}$

ESEMPIO 1:

$$2x - 1 \geq \sqrt{x^2 - 4}$$

che è una disuguaglianza irrazionale di tipo I, è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ (2x-1)^2 \geq x^2 - 4 \end{cases}$$

INFATTI: Per iniziare bisogna assicurarsi che l'espressione $\sqrt{x^2 - 4}$ abbia senso, ossia che $x^2 - 4 \geq 0$.

Si noti che, per $x = 1$, si ha $x^2 - 4 = 1^2 - 4 = -3$ e NON HA SENSO scrivere $\sqrt{-3}$.

Poi, tenendo conto che $\sqrt{x^2 - 4} \geq 0$ e che $2x - 1 \geq \sqrt{x^2 - 4}$, bisogna richiedere che l'espressione $2x - 1 \geq 0$.

Si noti che, per $x = -3$, si ha $x^2 - 4 = (-3)^2 - 4 = 5$ e $2x - 1 = -7$,

ma NON VALE $-7 \geq \sqrt{5}$, mentre vale $(-7)^2 \geq 5$, ossia $49 \geq 5$!!!

Infine, tenendo conto del fatto che $\sqrt{x^2 - 4} \geq 0$, $x^2 - 4 \geq 0$ e $2x - 1 \geq 0$, la disequazione $2x - 1 \geq \sqrt{x^2 - 4}$ è equivalente a richiedere che $(2x-1)^2 \geq \left(\sqrt{x^2 - 4}\right)^2$, ossia $(2x-1)^2 \geq x^2 - 4$.

Si noti che è servita la proprietà: $0 \leq \alpha \leq \beta$ se e solo se $0 \leq \alpha^2 \leq \beta^2$

Quindi per risolvere la disequazione razionale

$$2x - 1 \geq \sqrt{x^2 - 4}$$

va risolto il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ (2x-1)^2 \geq x^2 - 4 \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} x \geq 2 \quad \text{oppure} \quad x \leq -2 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 4x + 1 \geq x^2 - 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x^2 - 4x + 5 \geq 0 \quad \text{che vale per ogni } x\text{, in quanto } \Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 < 0 \text{ e } a = 3 > 0 \end{cases}$$

e quindi la soluzione è: $2x - 1 \geq \sqrt{x^2 - 4}$ per ogni $x \geq 2$

Ricapitolando: **una disuguaglianza del tipo I**

$$\boldsymbol{A(x) \geq \sqrt{B(x)}} \quad \textbf{equivale al sistema di disuguaglianze} \quad \begin{cases} \boldsymbol{B(x) \geq 0} \\ \boldsymbol{A(x) \geq 0} \\ \boldsymbol{\left(A(x)\right)^2 \geq B(x)} \end{cases}$$

Passiamo ora invece ad un esempio di disuguaglianza irrazionale di tipo II

$$2x - 1 \leq \sqrt{x^2 - 4}$$

Questa disuguaglianza è equivalente ai seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ 2x - 1 \leq 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ (2x-1)^2 \leq x^2 - 4 \end{cases}$$

la soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni dei due sistemi.

INFATTI: Per iniziare bisogna assicurarsi che l'espressione $\sqrt{x^2 - 4}$ abbia senso, ossia che $x^2 - 4 \geq 0$.

COME PRIMA: Si noti che, per $x = 1$, si ha $x^2 - 4 = 1^2 - 4 = -3$ e NON HA SENSO scrivere $\sqrt{-3}$.

Poi, vanno distinti i casi in cui l'espressione $2x - 1 \leq 0$ e il caso in cui $2x - 1 > 0$:

$\boxed{\text{quando } 2x - 1 \leq 0}$

basta richiedere che $x^2 - 4 \geq 0$ e abbiamo finito,

Si noti che ogni numero negativo o nullo è minore o uguale a una radice quadrata

in quanto una radice quadrata è sempre positiva o nulla: ad esempio $-3 \leq \sqrt{5}$

$\boxed{\text{quando } 2x - 1 \geq 0}$

tenendo conto del fatto che $\sqrt{x^2 - 4} \geq 0$, $x^2 - 4 \geq 0$ e $2x - 1 \geq 0$, la disequazione $2x - 1 \leq \sqrt{x^2 - 4}$ è equivalente a richiedere che $(2x - 1)^2 \leq \left(\sqrt{x^2 - 4}\right)^2$, ossia $(2x - 1)^2 \leq x^2 - 4$.

Quindi per risolvere la disequazione irrazionale $\boxed{2x - 1 \leq \sqrt{x^2 - 4}}$ vanno risolti i seguenti sistemi:

primo sistema

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ 2x - 1 \leq 0 \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} x \geq 2 \quad \text{oppure} \quad x \leq -2 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

la cui soluzione è: $\{x \text{ tali che } x \leq -2\}$; ovvero $x \leq -2$ ovvero $x \in (-\infty, -2]$

secondo sistema

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ (2x-1)^2 \leq x^2 - 4 \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} x \geq 2 \quad \text{oppure} \quad x \leq -2 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 4x + 1 \leq x^2 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 4x + 5 \leq 0 \quad \text{che non vale mai, in quanto } \Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 < 0 \text{ e } a = 3 > 0 \end{cases}$$

e quindi $2x - 1 \leq \sqrt{x^2 - 4}$ è soddisfatta per $x \in [2, +\infty) \cup \emptyset = x \in [2, +\infty)$.

Ricapitolando: **risolvere una disuguaglianza del tipo II**

$$\boldsymbol{A(x) \leq \sqrt{B(x)}} \quad \textbf{equivale a risolvere il problema dato da due sistemi di disuguaglianze:}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{B(x) \geq 0} \\ \boldsymbol{A(x) \leq 0} \end{cases} \qquad \textbf{oppure} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{B(x) \geq 0} \\ \boldsymbol{A(x) \geq 0} \\ \boldsymbol{\left(A(x)\right)^2 \leq B(x)} \end{cases}$$

la soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni dei due sistemi.

OSSERVAZIONE 1: va notato che i valori di x per i quali $A(x) = B(x) = 0$ soddisfano sia il primo sistema che il secondo sistema. Non è molto elegante, ma non è sbagliato.

OSSERVAZIONE 2: va notato che la condizione $\boldsymbol{B(x) \geq 0}$ nel secondo sistema è sovrabbondante, in quanto automaticamente soddisfatta se vale anche $\boldsymbol{\left(A(x)\right)^2 \leq B(x)}$ in quanto $\boldsymbol{0 \leq \left(A(x)\right)^2 \leq B(x)}$: è poco elegante, ma è bene ricordare subito che la radice quadrata ha senso solo per numeri maggiori o uguali a zero.

Bisogna poi stare attenti al caso delle disuguaglianze strette, ad esempio

$\boldsymbol{A(x) < \sqrt{B(x)}}$ **equivale a risolvere il problema dato da due sistemi di disuguaglianze:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{B(x) \geq 0} \\ \boldsymbol{A(x) < 0} \end{cases} \qquad \textbf{oppure} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{B(x) \geq 0} \\ \boldsymbol{A(x) \geq 0} \\ \boldsymbol{\big(A(x)\big)^2 < B(x)} \end{cases}$$

la soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni dei due sistemi.

ESEMPIO 2

$$x - 1 \leq \sqrt{x^2 - 1}$$

vale se e solo se

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 1 \leq 0 \end{cases} \qquad \textbf{oppure} \qquad \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ \big(x - 1\big)^2 \leq x^2 - 1 \end{cases}$$

Il primo sistema è soddisfatto per $x \in \Big((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\Big) \cap (-\infty, 1]$ ossia per $x \in (-\infty, -1] \cup \{1\}$.

Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} x \leq -1 \quad \text{oppure} \quad x \geq 1 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 1 \end{cases}$ che a sua volta equivale a $\begin{cases} x \geq 1 \\ -2x \leq -2 \end{cases}$

e che soddisfatto per $x \geq 1$.

La soluzione è quindi: la disequazione irrazionale $x - 1 \leq \sqrt{x^2 - 1}$ è soddifatta per $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

ESEMPIO 2 BIS

$$x - 1 < \sqrt{x^2 - 1}$$

vale se e solo se

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \qquad \textbf{oppure} \qquad \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ \big(x - 1\big)^2 < x^2 - 1 \end{cases}$$

Il primo sistema è soddisfatto per $x \in \Big((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\Big) \cap (-\infty, 1)$ ossia per $x \in (-\infty, -1]$.

Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} x \leq -1 \quad \text{oppure} \quad x \geq 1 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 < x^2 - 1 \end{cases}$ che a sua volta equivale a $\begin{cases} x \geq 1 \\ -2x < -2 \end{cases}$

e che soddisfatto per $x > 1$.

La soluzione è quindi: la disequazione irrazionale $x - 1 < \sqrt{x^2 - 1}$ è soddifatta per $x \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$.

DISUGUAGLIANZE IRRAZIONALI (con le radici cubiche)

Siano $A(x)$ e $B(x)$ due espressioni polinomiali, una disuguaglianza irrazionale (con radici cubiche) è una disuguaglianza del tipo

TIPO I $\boxed{\boldsymbol{A(x) \geq \sqrt[3]{B(x)}}}$

TIPO II $\boxed{\boldsymbol{A(x) \leq \sqrt[3]{B(x)}}}$

Qui la trattazione è più semplice: infatti la radice cubica di un numero ha sempre senso, sia per numeri positivi che negativi, quindi semplicemente i due problemi sono equivalenti a

TIPO I $\boxed{\boldsymbol{A(x)^3 \geq B(x)}}$

TIPO II $\boxed{\boldsymbol{A(x)^3 \leq B(x)}}$

Le considerazioni fatte si generalizzano facilmente al caso di radici $n - sime$ distinguendo tra n pari, che si trattano in modo del tutto simile al caso delle radici quadrate, ed n dispari, che si trattano in modo del tutto simile al caso delle radici cubiche.