Foglio 2 (Analisi Vettoriale per Fisica a.a. 2015/16)

proff. F. Lanzara, A. Dall'Aglio, E. Montefusco

09 ottobre 2015

2.1 Esercizio

Data la funzione di due variabili

$$f(x,y) = \ln(8y - 2x^2 - 2y^2)$$

a) determinarne il dominio;
b) individuarne i punti critici;
c) individuare eventuali punti di massimo o minimo relativi.

2.2 Esercizio

Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{9 - 9x^2 - (y-1)^2}$$

a) trovare e disegnare il suo insieme di definizione $E \subset \mathbb{R}^2$, specificando se l'insieme è connesso o no, limitato o illimitato, aperto o meno; fornirne la rappresentazione grafica nel piano cartesiano;
b) determinare $\inf f(E)$, $\sup f(E)$ e, successivamente, $f(E)$;
c) determinare i punti critici di f, e classificarli.

2.3 Esercizio

Calcolare minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = (2x-3)e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

nel cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1. Mostrare che l'origine è un estremo relativo per f.

2.4 Esercizio

Si trovino estremi relativi e assoluti della funzione

$$f(x,y) = e^{x^2-y^2}(x^4 - y^4)$$

nel cerchio di centro l'origine e raggio 2.

2.5 Esercizio

Si trovino estremi relativi e assoluti della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} + y^2 - \frac{5}{6}x^3 + x^2 - \frac{x}{2}$$

nel dominio $D = \left\{(x,y) : |x| \leq 2, |y| \leq 2\right\}$.

2.6 Esercizio

Data la funzione di due variabili

$$f(x,y) = (e^{x+1} - 1)\ln(1+y^2) + x^2 - x$$

a) individuarne i punti critici;
b) individuare eventuali punti di massimo o minimo relativi.

2.7 Esercizio

Data la funzione di due variabili $f(x,y) = 4xy^2 - x - 3y$, determinarne i punti critici e classificarli. Inoltre trovare massimo e minimo assoluti nel quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

2.8 Esercizio

Data la funzione di due variabili $f(x,y) = x^3 + (x+y)(y-3x)$, determinarne i punti critici e classificarli. Successivamente trovare massimo e minimo assoluti nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(8,0)$, $(0,8)$.

2.9 Esercizio

Data la funzione

$$f(x,y) = e^{3x-y}(x^2 - y^2),$$

calcolarne i punti critici e classificarli. Successivamente calcolarne gli estremi assoluti nel triangolo (chiuso) di vertici $(0,0)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$.

2.10 Esercizio

Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^3y - 2y^2 + 3x^2y$$

2.11 Esercizio

Data la funzione

$$f(x,y) = y^4 + x^3 - 4y^2 - 3x^2 - 1$$

determinarne i punti critici e classificarli. Dire inoltre se f ammette massimo e minimo assoluti in $\mathbb{R}^2$.

2.12 Esercizio

Trovare e classificare i punti critici di

$$f(x,y) = 3x^2 - 12xy + y^3 + 6y^2 + 9y$$

Successivamente calcolarne estremo superiore ed estremo inferiore sia su $\mathbb{R}^2$ che sul primo quadrante.

2.13 Esercizio

Si f una funzione C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che il minimo assoluto di $f(x,y)$ nel quadrato $\{|x| \le 1, |y| \le 1\}$ sia assunto nel punto di frontiera $(0,1)$. Cosa si può dire sul suo gradiente in tale punto? E se invece è assunto nel vertice $(1,1)$?

2.14 Esercizio

Trovare estremi relativi ed assoluti nel piano della funzione

$$f(x,y) = 5 + (x + \sin y)^3 (x - \sin y)$$

2.15 Esercizio

Trovare (se esistono) il massimo e il minimo assoluti nel piano della funzione

$$f(x,y) = \frac{2 - x^2y^2}{\exp\left(4\sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

2.16 Esercizio (*)

Trovare massimi e minimi locali della funzione

$$f(x,y) = [(x-2)^2 - 9y^2 - 5]\exp\left(x + \frac{2 - x^2 + 9y^2}{4}\right)$$

2.17 Esercizio

Tra tutti i parallelepipedi aventi gli spigoli paralleli agli assi coordinati di $\mathbb{R}^3$ e due vertici opposti nei punti $(0,0,0)$ e $(x,y,z) \in \Sigma$, con $\Sigma = \left\{[x,y,z) \in (0,+\infty)^3 : z = 4 - 2x^2 - y^2\right\}$, si trovi il parallelepipedo di volume massimo.

2.18 Esercizio

Sia $S(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - A|^2 + |\mathbf{x} - B|^2 + |\mathbf{x} - C|^2$, dove $A(1,1), B(2,0), C(1,-1)$ e $\mathbf{x} \in \left\{|x| \le 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Si trovi il massimo e il minimo assoluto della funzione S.

2.19 Esercizio (*)

Una funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ si dice **coercitiva** se

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \to +\infty} f(\mathbf{x}) = +\infty,$$

cioè se per ogni $M > 0$ esiste un $K > 0$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ verificante $\|\mathbf{x}\| > K$ si ha $f(\mathbf{x}) > M$.
Dimostrare la seguente variante del Teorema di Weierstrass:
Teorema: Ogni funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua e coercitiva ammette minimo assoluto in $\mathbb{R}^N$.
(Suggerimento: ricondursi al Teorema di Weierstrass in una palla chiusa e limitata)

2.20 Esercizio

Utilizzando il teorema enunciato nel precedente esercizio, provare che la funzione $S(\mathbf{x})$ definita nell'esercizio 2.18 ammette un minimo assoluto in $\mathbb{R}^2$, e trovarlo.