Esercitazione martedì in Aula Amaldi alle 14:30 → 16:15

a seguire, ricevimento studenti

Trovare sup e inf di $f(x,y)=(2x-3)e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ nel cerchio (aperto!)

$$E=\{(x,y): x^2+y^2<1\}$$

---

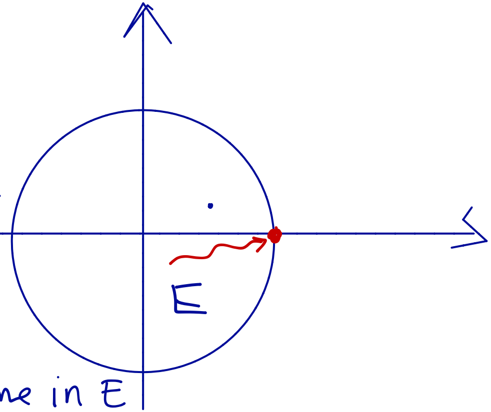
OSS $f(x,y)$ è continua su tutto $\overline{E}=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$

In $E$ non potevamo applicare Weierstrass, ma in $\overline{E}$ sì.

In $\overline{E}$ abbiamo già trovato max e min.

$$\max_{(x,y)\in E} f(x,y)=f(1,0)=-e$$

$$\Rightarrow \sup_{(x,y)\in E} f(x,y)=-e.$$ Infatti $-e\ge f(x,y)\ \forall (x,y)\in E$




Inoltre $f$ è continua in $(1,0)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)=f(1,0)=-e \Rightarrow$$ $f$ assume in $E$ valori vicini quanto vogliamo a $-e$.

Analogamente, $\min_{\overline{E}} f = f(-1,0) = -5e \Longrightarrow \inf_{E} f = -5e$

# C.S. AFFINCHÈ UN P.TO CRITICO SIA DI MIN./MAX. RELATIVO

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^2(A)$, $A$ aperto. $\underline{x}_0 \in A$ t.c. $\nabla f(\underline{x}_0) = 0$. Allora

$D^2 f(\underline{x}_0)$ def$^{ta}$ positiva $\Longrightarrow$ $\underline{x}_0$ pto di min. rel. stretto

" " " negativa $\Longrightarrow$ " " " max. " "

<u>OSS</u> Non è una C.N.

$f(x,y) = x^4 + y^4 \Rightarrow (0,0)$ è punto di min assoluto (stretto)

$\nabla f(0,0) = \underline{0}$ come da thm. Fermat

$f_{xx}(x,y) = 12x^2$, $f_{yy}(x,y) = 12y^2$, $f_{xy}(x,y) = 0$

$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ non è def$^{ta}$ positiva

## C.N. affinché un p.to critico interno sia di min/max rel.

**TEOREMA** Stesse ipotesi di prima:

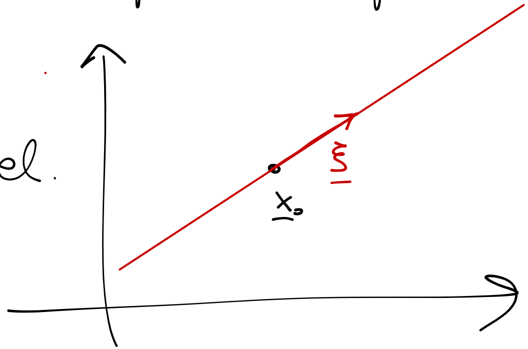
Sia $f : A \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^2(A)$, $A$ aperto. $\underline{x}_0 \in A$ t.c. $\nabla f(\underline{x}_0) = 0$. Allora

se $\underline{x}_0$ è punto di min. rel. per $f$. $\Longrightarrow$ $D^2 f(\underline{x}_0)$ è semidef. positiva

" " " " " max. " $\Longrightarrow$ " " " negativa

**DIM.** Fissiamo $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots \xi_N) \in \mathbb{R}^N$. Definiamo la funzione di 1 variab.

$$g(t) = f(\underline{x}_0 + t\underline{\xi})$$




Per ipotesi, $g$ ha un min. rel.

per $t = 0$ $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow g'(0) = 0 \, , \quad g''(0) \geq 0$$

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(\underline{x}_0 + t\underline{\xi}) = \sum_i f_{x_i}(\underline{x}_0 + t\underline{\xi})\, \xi_i = \nabla f(\underline{x}_0 + t\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi}$$

$$g''(t) = \sum_{i,j=1}^{N} f_{x_i x_j}(\underline{x}_0 + t\underline{\xi})\, \xi_i \xi_j = \left(D^2 f(\underline{x}_0 + t\underline{\xi})\underline{\xi}, \underline{\xi}\right)$$

$$g''(0) = \left(D^2 f(\underline{x}_0)\underline{\xi}, \underline{\xi}\right) \geq 0$$

$\Rightarrow D^2 f(\underline{x}_0)$ semidefinita positiva. $\square$

# RIASSUNTO:

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^2(A)$, $A$ aperto. $\underline{x}_0 \in A$ t.c. $\nabla f(\underline{x}_0) = 0$. Allora

1) Se $D^2 f(\underline{x}_0)$ è def$^{\text{ta}}$ positiva $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ è p.to di min. rel. (stretto)

2) Se $D^2 f(\underline{x}_0)$ è def$^{\text{ta}}$ negativa $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ è pto di max. rel. (stretto)

3) Se $D^2 f(\underline{x}_0)$ è indefinita $\Rightarrow$ il p.to non è né di max, né di min. (sella)

4) Se $D^2 f(x_0)$ è semidefinita $\Rightarrow$ non si può dire nulla!

$f(x,y) = x^2 + y^4$ ha un minimo rel. stretto in $(0,0)$

$g(x,y) = x^2 - y^4$ ha una sella in $(0,0)$

ma $D^2 f(0,0) = D^2 g(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (semidef. positiva).

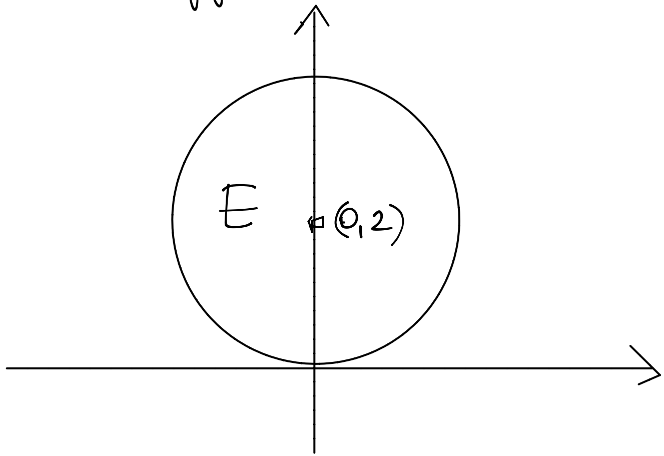
# ESERCIZIO

Trovare e classificare i punti critici di $f(x,y) = \ln(4y - x^2 - y^2)$

$$\operatorname{dom} f = \{(x,y) : 4y - x^2 - y^2 > 0\} = \{(x,y) : x^2 + y^2 - 4y + 4 < 0 + 4\}$$

$$= \{(x,y) : x^2 + (y-2)^2 < 2^2\} = E$$

cerchio (aperto) di centro $(0,2)$ e raggio 2



$$f(x,y) = \ln(4y - x^2 - y^2)$$

$$f_x(x,y) = \frac{-2x}{4y - x^2 - y^2} \qquad f_y(x,y) = \frac{4-2y}{4y-x^2-y^2}$$

<u>Ricerca dei pti critici.</u>

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \text{ solo pto critico } (0,2)$$

+ termini che si annullano in $(0,2)$

$$f_{xx}(x,y)\Big|_{(0,2)} = -\frac{2}{4y-x^2-y^2}\Big|_{(0,2)} = -\frac{1}{2}$$

$$f_{x,y}(0,2) = 0 \qquad f_{yy}(x,y)\Big|_{(0,2)} = -\frac{2}{4y-x^2-y^2}\Big|_{(0,2)} = -\frac{1}{2}$$

$$D^2 f(0,2) = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$ def$^{ta}$ negativa $\Rightarrow (0,2)$ pto di max. rel. (stretto)

Risultato ovvio perché in realtà trovare gli estremi rel. di $f$ equivale a trovare gli estremi relativi di $g(x,y) = 4y - x^2 - y^2 =$

$$= -\left[x^2 + (y-2)^2\right] + 4 =$$

$$= -\|(x,y) - (0,2)\|^2 + 4$$

# "SEGNO" delle matrici simmetriche 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \underbrace{(a+c)}_{\lambda_1+\lambda_2}\lambda + \underbrace{(ac-b^2)}_{\lambda_1 \lambda_2} = 0 \qquad ac-b^2 = \det A$$

se $\det A > 0$, $a > 0 \Longrightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0 \Longrightarrow A$ def. positiva

$\Downarrow$

$ac > 0$

se $\det A > 0$, $a < 0 \Longrightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0 \rightarrow A$ def. negativa

se $\det A < 0 \Longrightarrow \lambda_1, \lambda_2$ hanno segno opposto $\Longrightarrow A$ indefinita.

se $\det A = 0 \Longrightarrow$ una delle $\lambda_i$ è nulla $\Longrightarrow A$ è semidefinita

Se $\nabla f(x_0,y_0)=0$

1) $\det D^2 f(x_0,y_0)>0$, $f_{xx}(x_0,y_0)>0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ pto di min. rel. stretto

2) $\det D^2 f>0$, $f_{xx}<0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ p.to di max. rel. stretto

3) $\det D^2 f<0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ pto di sella

4) $\det D^2 f=0 \Rightarrow$ ????

**4.** Trovare e classificare i punti critici della funzione

NB: ho dimenticato di rispondere a questa domanda, la vedremo in una delle prossime lezioni

$$f(x,y) = 4x^2 - 4y^3 + 4xy^2 - 7x\,.$$

Successivamente, dire se esistono massimo e minimo assoluti nel primo quadrante $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

$$f_x(x,y) = 8x + 4y^2 - 7$$

$$f_y(x,y) = -12y^2 + 8xy$$

Cerco i p.ti critici:

$$\begin{cases} 8x + 4y^2 - 7 = 0 \\ 4y(-3y + 2x) = 0 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{7}{8} \end{cases}$ $\quad P_1\left(\frac{7}{8}, 0\right)$

2) $\begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ 4y^2 + 12y - 7 = 0 \end{cases}$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36+28}}{4} = \frac{-3 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1/2 \\ -7/2 \end{cases}$$

$P_2\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $P_3\left(-\frac{21}{4}, -\frac{7}{2}\right)$

$$f_x(x,y) = 8x + 4y^2 - 7 \qquad f_{xx}(x,y) = 8; \; f_{xy}(x,y) = 8y$$

$$f_y(x,y) = -12y^2 + 8xy \qquad f_{yy}(x,y) = -24y + 8x$$

$$D^2 f\left(\frac{7}{8}, 0\right) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{def}^{ta} \text{ positiva} \Rightarrow \left(\frac{7}{8}, 0\right) \text{ è pto di min. rel.}$$

$$D^2 f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} = -48 - 16 < 0 \Rightarrow \text{sella}$$

$$\cancel{\det \begin{bmatrix} 8-\lambda & 4 \\ 4 & -6-\lambda \end{bmatrix}} = 0$$

$$D^2 f\left(-\frac{21}{4}, -\frac{7}{2}\right) = \begin{bmatrix} 8 & -28 \\ -28 & 42 \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 8 & -28 \\ -28 & 42 \end{bmatrix} = 4 \cdot 7 \det \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = 28(12 - 28) < 0$$

$$\Rightarrow \text{sella}$$

# Esercizio

Calcolare e classificare i punti critici di

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 2x + 2y + 1$$

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = 6x - 2z + 2 = 0 \\ f_y(x,y,z) = 4y + 2 = 0 \\ f_z(x,y,z) = 2z - 2x = 0 \end{cases}$$

$x = -\frac{1}{2} = z$

$y = -\frac{1}{2}$

$z = x$

Unico pto critico $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$f_{xx}(x,y,z) = 6$; $f_{xy}(\cdot\cdot) = 0$; $f_{xz}(\cdot\cdot) = -2$

$f_{yy}(\ ) = 4$; $f_{yz}(\cdot\cdot) = 0$

$f_{zz}(\ ) = 2$

$$D^2 f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Eq.$^{ne}$ caratteristica

$$\det\begin{bmatrix} 6-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

to be continued .....