MATRICI QUADRATE e FORME QUADRATICHE

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}^N \qquad A = (a_{ij})_{i,j=1\ldots N}$$

Alla matrice quadrata A si associa la forma quadratica

$$F_A(\underline{\xi}) = (A\xi, \xi) = \xi^T A \xi = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \qquad \underline{\xi} \in \mathbb{R}^N$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow F(\underline{\xi}) = \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2\xi_1 + 2\xi_2^2$$

$$\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$$

negativa

DEF. A si dice definita positiva se la f.q. F associata verifica $F(\underline{\xi}) \overset{<}{>} 0 \quad \forall \underline{\xi} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}$

negativa

A si dice semidefinita positiva se la f.q. F_A verifica $F(\underline{\xi}) \overset{\leq}{\geq} 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$

A si dice indefinita se F_A cambia segno, cioè se esistono $\underline{\xi}$ t.c. $F_A(\underline{\xi}) > 0$ e $\underline{\eta}$ t.c. $F_A(\eta) < 0$

ESEMPI

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow F(\underline{\xi}) = \xi_1^2 + 3\xi_2^2$ def. positiva

$\xi_1^2 + 3\xi_2^2 > 0 \quad \forall\, \underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow F(\underline{\xi}) = \xi_1^2 + 3\xi_1\xi_2 = \xi_1(\xi_1 + 3\xi_2)$

indefinita

$\underline{\xi} = (1,0) \Rightarrow F(\underline{\xi}) = 1 > 0$

$\underline{\xi} = (1,-1) \Longrightarrow F(\underline{\xi}) = -2 < 0$

3) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow F(\underline{\xi}) = 4\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 =$

$= (2\xi_1 + \xi_2)^2$

$\Rightarrow F(\underline{\xi}) \geq 0 \quad \forall \underline{\xi}$; se $\underline{\xi} = (1, -2) \Rightarrow F(\underline{\xi}) = 0$

$\Rightarrow$ semidefinita positiva

PROP. (le matrici positive sono "uniformemente" positive)

Sia $A \in M^N$ una matrice definita positiva.
Allora $\exists\, m>0$ t.c. $(A\underline{\xi}, \underline{\xi}) \geq m \|\underline{\xi}\|^2$

DIM. $S = \{ \underline{\xi} \in \mathbb{R}^N : \|\underline{\xi}\| = 1 \} \Rightarrow S$ chiuso e limitato

$F(\underline{\xi}) = (A\underline{\xi}, \underline{\xi})$ continua $\Rightarrow F$ ammette minimo su S, sia $m>0$ $\Rightarrow$ Se $\underline{\xi} \in S \Rightarrow F(\underline{\xi}) \geq m$

Sia ora $\underline{\xi}$ qualunque $\in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}$ OSS Se $t>0$ $F(t\underline{\xi}) = t^2 F(\underline{\xi})$

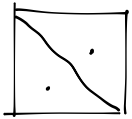
$$F(\underline{\xi}) = (A\underline{\xi}, \underline{\xi}) = F\left(\|\underline{\xi}\| \frac{\underline{\xi}}{\|\underline{\xi}\|}\right) = \|\underline{\xi}\|^2 F\left(\frac{\underline{\xi}}{\|\underline{\xi}\|}\right) \geq m \|\underline{\xi}\|^2. \quad \square$$

$\frac{\underline{\xi}}{\|\underline{\xi}\|} \in S$

AUTOVALORI DI MATRICI SIMMETRICHE

Da questo momento supponiamo A simmetrica, cioè

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$



OSS Questo è vero per l'Hessiano di una funz. C^2.

DEF. Un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice autovalore della matrice A se $\exists\, \underline{\xi} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}$ t.c. $A\underline{\xi} = \lambda \underline{\xi}$

TEOREMA Gli autovalori di A sono tutte e sole le sol. dell'eq^{ne} algebrica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

eq^{ne} caratteristica della matrice

$\uparrow$ matrice identità

TEOREMA Una matrice simmetrica $N \times N$ ammette sempre N autovalori reali (contati con la loro molteplicità)

TEOREMA Sia A una matrice simmetrica.

A def. positiva $\iff$ tutti gli autovalori sono > 0

negativa < 0

A semidef. positiva $\iff$ tutti gli autovalori sono ≥ 0

negativa ≤ 0

A indefinita $\iff$ A ammette sia autovalori positivi che negativi.

ESERCIZI SULLA DETERMINAZIONE DEGLI AUTOVALORI

1) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

eq^{ne} caratteristica

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0 \iff \lambda^2 - 5\lambda = 0$$

$$\lambda = 0 \quad \lambda = 5$$

matrice semidefinita positiva, non def. positiva

2)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

matrice def. positiva

$$(3-\lambda)^2(4-\lambda) - (3-\lambda) - \frac{1}{4}(3-\lambda) = 0$$

$$(3-\lambda)\left[12-7\lambda+\lambda^2-\frac{5}{4}\right]=0 \qquad \lambda^2-7\lambda+\frac{43}{4}=0$$

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$

$$(3-\lambda)(4\lambda^2-28\lambda+43)=0$$

$$\lambda = \frac{14 \pm \sqrt{196-172}}{4} = \frac{14 \pm \sqrt{24}}{4} \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$$

$f : A \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^2(A)$

aperto

$\underline{x_0} \in A$ pto critico di f. $\left(\nabla f(\underline{x_0}) = \underline{0} \right)$

Problema: classificare il punto critico, cioè decidere se $\underline{x_0}$ è un p.to di min. relativo, massimo relativo, né max. né minimo.

Un punto critico di f che non è né di max. né di min. rel. si dice punto di sella.

Esempi principali

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad \nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

L'unico punto critico è l'origine, che è di min. relativo, anzi assoluto.

$$f_{xx}(x,y) = 2 \; ; \; f_{xy}(x,y) = 0 \; ; \; f_{yy}(x,y) = 2$$

$$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

matrice def^{ta} positiva

2) $f(x,y) = -x^2 - y^2$

$(0,0)$ è l'unico pto critico, che è max. relativo

$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ def^{ta} negativa

3) $f(x,y) = x^2 - y^2$ paraboloide a sella

$\nabla f(x,y) = (2x, -2y) \Rightarrow (0,0)$ unico pto critico

E' un punto di sella, in quanto è un minimo relativo nella direzione dell'asse x, ma massimo relativo nella direzione dell'asse y.

$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ indefinita

4) $f(x,y) = xy$

$\nabla f(x,y) = (y, x) \Rightarrow$ L'unico pto critico è $(0,0)$

$(0,0)$ è un pto di sella (min. lungo la direzione $x=y$, max. lungo la direzione $y=-x$)

$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ eq^{ne} caratteristica $\lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda = \pm 1$ $\Rightarrow$ matrice indefinita

5) $f(x,y) = x^3$

$\nabla f(x,y) = (3x^2, 0) \Rightarrow$ tutto l'asse y è fatto da p.ti critici

$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ semidef.ta positiva e negativa

Anche questo è un punto di sella in quanto in ogni intorno dell'origine ci sono punti in cui la funzione è positiva e punti in cui è negativa.

OSS. Lo chiamiamo punto di sella, ma non ha la forma di "sella"

Di tutte queste funzioni, a lezione sono stati mostrati i grafici. Lascio agli studenti il semplice esercizio di farsi disegnare i grafici da un PC.

TEOREMA Sia $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto $\underline{x}_0 \in A$, $f \in C^2(A)$

p.to critico di f ($\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$)

C.S affinché $\underline{x}_0$ sia un p.to di ~~min.~~ max relativo stretto per f è che $D^2 f(\underline{x}_0)$ sia def.^{ta} ~~positiva~~ negativa.

DIM Sviluppo di Taylor del 2° ordine.

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \cancel{\nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)} + \frac{1}{2}\left(D^2 f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0), (\underline{x} - \underline{x}_0)\right) + o\left(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|^2\right)$$

per $\underline{x} \to \underline{x}_0$

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = \frac{1}{2}\left(D^2 f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0\right) + o\left(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|^2\right)$$

$D^2 f(\underline{x}_0)$ def^{ta} positiva $\xRightarrow[\text{PROP}]{} \left(D^2 f(\underline{x}_0)\, \underline{\xi}, \underline{\xi}\right) \geq m \|\underline{\xi}\|^2$ $\quad (m > 0)$

$$\Rightarrow f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) \geq \frac{m}{2} \|\underline{x} - \underline{x}_0\|^2 + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|^2) =$$

$$= \|\underline{x} - \underline{x}_0\|^2 \left(\frac{m}{2} + o(1) \right)$$

infinitesimo per $\underline{x} \to \underline{x}_0$

Scelgo un intorno $B_R(\underline{x}_0)$ abbastanza piccolo in modo che la parentesi $\frac{m}{2} + o(1)$ sia > 0.

$\forall \underline{x} \in B_R(\underline{x}_0) \setminus \{\underline{x}_0\}$ $\quad f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) > 0$

min. rel. stretto.