AVVISI:

1. Oggi alle 14:30, in quest'aula, esercitazione facoltativa con il Prof. Montefusco

2. Alle 16:45, chi desidera chiedere spiegazioni può passare nel mio studio al Dip. di Matematica (fino alle 18:15)

MASSIMI E MINIMI RELATIVI

DEF. Sia $f : E \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Un punto $\underline{x}_0 \in E$ si dice $\boxed{\text{punto di massimo (minimo) relativo}}$ per f se esiste un intorno $B_R(\underline{x}_0)$ t.c. $f(\underline{x}_0) \geq f(\underline{x})$ $\quad (f(\underline{x}_0) \leq f(\underline{x}))$

$\forall\, \underline{x} \in B_R(\underline{x}_0) \cap E$.

Il punto $\underline{x}_0$ si dice punto di massimo (minimo) relativo $\boxed{\text{stretto}}$ se la disuguaglianza è stretta per $\underline{x} \neq \underline{x}_0$, cioè se

$$f(\underline{x}_0) > f(\underline{x}) \quad (f(\underline{x}_0) < f(\underline{x})) \quad \forall\, \underline{x} \in B_R(\underline{x}_0) \cap E \setminus \{\underline{x}_0\}$$

OSS Ovviamente, un punto di massimo assoluto è anche di massimo relativo (idem per il minimo).

DEF. I punti di massimo/minimo relativi di f si dicono $\boxed{\text{estremi relativi}}$ di f.

TEOREMA DI FERMAT (C.N. PER L'ESTREMALITÀ).

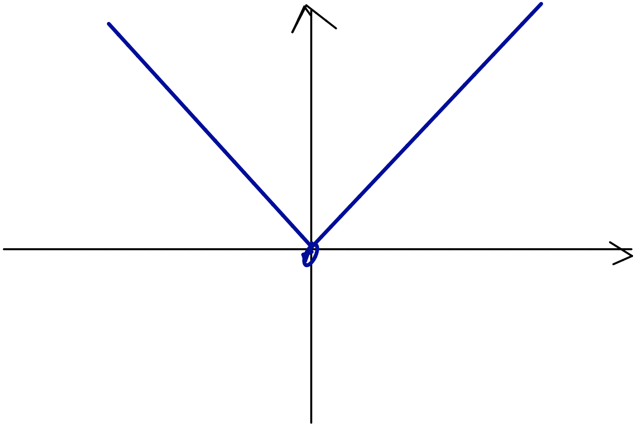
Sia $f : E \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$. Se $\underline{x}_0$ è punto di estremo relativo interno a E, e se f ammette derivate parziali in $\underline{x}_0$, allora queste sono nulle.

IN BREVE: Un estremo relativo interno è anche un punto critico (o stazionario), cioè un punto in cui si annulla il gradiente di f (sempre che tale gradiente esista!)

OSS. Ci sono anche estremi relativi interni in cui il gradiente non esiste!

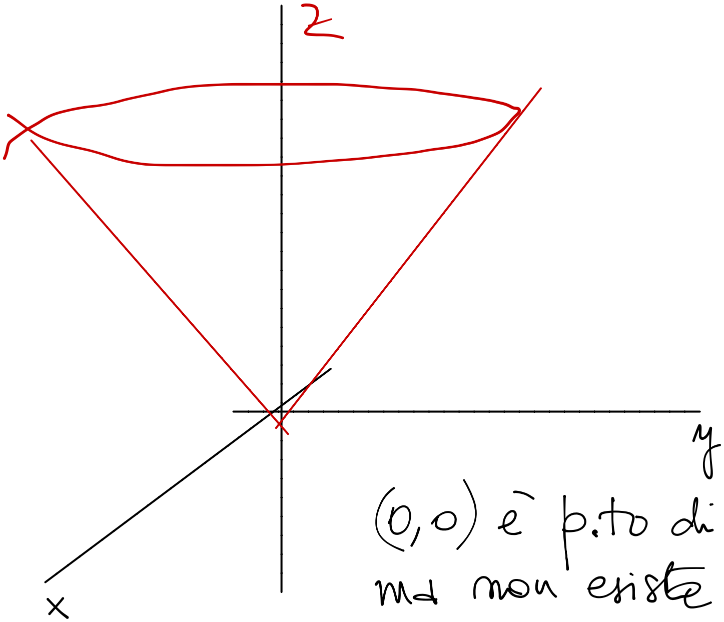
ESEMPIO:

Esempio per $N = 1$: $f(x) = |x|$



<u>per $N=2$</u>

$$f(x,y) = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$$



$(0,0)$ è p.to di min. assoluto, ma non esiste $\nabla f(0,0)$

APPLICAZIONE AL TEOREMA DI WEIERSTRASS

$f : E \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, f continua, E chiuso e limitato

Per Weierstrass, f ammette max. e min. assoluti.

Dove li cerchiamo?

1) Nei pti critici interni;
2) nei pti dove non esiste il gradiente.
3) max. e min. sulla frontiera

Questo spesso ci porta a evidenziare un numero finito di punti di E. Calcolo f su questi punti $\Rightarrow$ il valore più alto sarà il max, il più basso sarà il min.

0.16 Calcolare minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = (2x - 3)e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(chiuso)

nel cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1. Mostrare che l'origine è un estremo relativo per f.

dopo!

f è continua

$E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ è chiuso e limitato.

$\overset{W}{\Longrightarrow}$ esistono max. e min. assoluti. Li cerchiamo

2) Possibili punti di non derivabilità : $\boxed{(0,0)}$

1) Pti critici interni

$$\begin{cases} f_x(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}\left(2+(2x-3)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0 \\ f_y(x,y) = (2x-3)\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, e^{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases} \qquad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

1) $\begin{cases} y=0 \\ 2+(2x-3)\dfrac{x}{|x|} \end{cases}$

$(x>0)$ $\quad 2+2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ $\quad \boxed{\left(\frac{1}{2},0\right)}$

$(x<0)$ $\quad 2-2x+3=0$

$x=\frac{5}{2} > 0$

2) $x=\frac{3}{2}$

$2=0$ impossibile!

3) $\partial E = \{(x,y) : x^2+y^2=1\}$ circonferenza.

Primo modo: parametrizzare la circonferenza

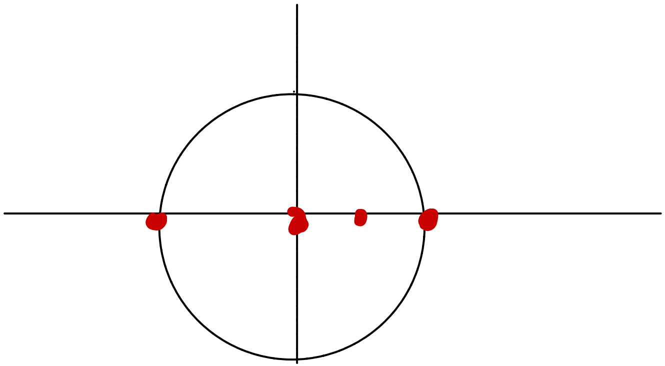
$$(x,y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

$$\varphi(\theta) = f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (2\cos\theta - 3)\, e$$

massimo per $\theta = 0 \Rightarrow \varphi(\theta) = -e$

minimo per $\theta = \pi \Rightarrow \varphi(\theta) = -5e$

$$\boxed{\begin{array}{c}(1,0)\\(-1,0)\end{array}}$$



Secondo modo: osservare che su ∂E $f(x,y) = (2x-3)e$ ammette max in $(1,0)$ e min. in $(-1,0)$.

$f(0,0) = -3$

$f\left(\frac{1}{2},0\right) = -2\sqrt{e}$

$f(1,0) = -e$ max assoluto

$f(-1,0) = -5e$ min. assoluto.

P.ti su cui tornare:

1) derivabilità in $(0,0)$

2) $(0,0)$ è p.to di estremo relativo

0.18 Si trovino estremi ~~relativi e~~ assoluti della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} + y^2 - \frac{5}{6}x^3 + x^2 - \frac{x}{2}$$

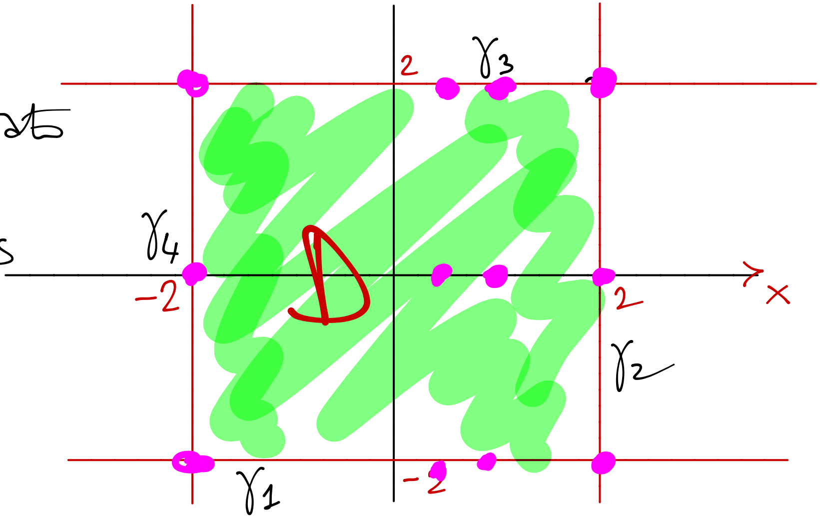
nel dominio $D = \{(x,y) : |x| \leq 2, |y| \leq 2\} = [-2,2] \times [-2,2]$

f continua

D chiuso e limitato

$\Downarrow$

Vale Weierstrass



1) $\begin{cases} f_x(x,y) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0 \\ f_y(x,y) = 2y = 0 \end{cases}$

$y = 0$

$x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0$ $\qquad x = 1$ è sol^{ne}

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & & 1 & -3/2 & 1/2 \\ \hline & 1 & -\frac{3}{2} & 1/2 & // \end{array}$$

$(x-1)\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0$

$2x^2 - 3x + 1 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$

$$\boxed{(1,0) \quad \left(\frac{1}{2},0\right)}$$

<u>Studio di ∂E</u>

1) γ_3 $\varphi(x)=f(x,2)=\frac{x^4}{4}-\frac{5}{6}x^3+x^2-\frac{x}{2}+4$

$\varphi'(x)=x^3-\frac{5}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}$ già studiata

$x=\frac{1}{2},\ x=1$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2},2\right),\ (1,2),\ (-2,2),\ (2,2)}$$

2) su γ_1 $\eta(x)=f(x,-2)=\varphi(x)$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2},-2\right);\ (1,-2);\ (-2,-2);\ (2,-2)}$$

$\gamma_2)$ $\quad f(2,y) = 4 - \frac{20}{3} + 3 + y^2 = \frac{1}{3} + y^2$

$$f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{64} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{8} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{4}} = \frac{3-20}{192} = -\frac{17}{192}$$ minime

$$f(1,0) = \frac{1}{4} - \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{3-10+6}{12} = -\frac{1}{12}$$

$$f(2,0) = 4 - \frac{5}{6}\cdot 8 + 4 - 1 = \frac{12-20+12-3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$f(-2,0) = 4 + \frac{20}{3} + 4 + 1 = \frac{47}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \ldots$$

$$f(1,2) = \ldots$$

$$f(2,2) = \ldots$$

$$f(-2,2)$$