Foglio 1 (Analisi Vettoriale per Fisica a.a. 2015/16)

proff. F. Lanzara, A. Dall'Aglio, E. Montefusco

02 ottobre 2015

1.1 Esercizio

Determinare il segno e l'insieme di definizione delle funzioni

$$\sqrt{xy+y^2} \qquad \sqrt{y^2-9}+\sqrt{4-x^2} \qquad \ln(4-x^2-9y^2)$$

Disegnare gli insiemi trovati e dire se sono aperti o chiusi o né aperti né chiusi e se sono limitati.

1.2 Esercizio

Disegnare il grafico di

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{se} \quad x^2+y^2\geq 1 \\ \\ \sqrt{x^2+y^2} & \text{se} \quad x^2+y^2<1 \end{cases}$$

e dire se essa è continua in $\mathbb{R}^2$.

1.3 Esercizio

Disegnare le curve di livello delle funzioni seguenti

$$(x+y)^2 \qquad y^3 \qquad e^{x^2+y^2} \qquad \ln(x^2+4y^2)$$

1.4 Esercizio

Siano $f(x,y)=y\log(x+1)$ e $g(x,y)=\sqrt{2y-x^2}$. Determinare e disegnare l'insieme di definizione delle funzioni f,g, $f+g$ e f/g.

1.5 Esercizio

Determinare l'insieme in cui la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} & \text{se} \quad y \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se} \quad y = 0 \end{cases}$$

è continua. Disegnare nel piano le curve di livello $\{f(x,y) = c\}$.

1.6 Esercizio

Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^4}{x^4 + y^2}$$

i. determinare l'insieme D in cui f è definita e dire se è aperto
ii. esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?
iii. Disegnare nel piano xy le curve di livello $\{f(x,y) = c\}$.
iv. Determinare l'immagine $f(D)$.

1.7 Esercizio

Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$, sia f definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos(x+y) - 1 & x + y < 0 \\ ax + by + c & x + y \geq 0 \end{cases}$$

Per quali a, b, c la funzione f è continua in $\mathbb{R}^2$?

1.8 Esercizio

Data la funzione $f(x,y) = |x+y|(x-y)$
i. determinare l'insieme in cui f è continua,
ii. calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

1.9 Esercizio

Sia f la funzione razionale

$$f(x,y) = \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^4 + y^4}.$$

i. Dire se è vero che

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right]$$

ii. Verificare che tuttavia non esiste il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

1.10 Esercizio

Siano $f_1(x,y) = x^2+y^2$, $f_2(x,y) = 2xy$, disegnare (ad esempio con la convenzione delle freccette) i campi vettoriali ∇f_1 e ∇f_2 dei loro gradienti .

1.11 Esercizio

Sia $p(x,y) = x^3 - 3axy^2 - 3bx^2y$. Dire per quali a e b la funzione $p(x,y)$ è armonica cioè è soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}p(x,y) = 0.$$

1.12 Esercizio

Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$, sia f definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(x+y) & x+y<0 \\ ax+by+c & x+y \geq 0 \end{cases}$$

i. Per quali a, b, c la funzione f è continua in $\mathbb{R}^2$?
ii. Per quali a, b, c la funzione f è derivabile in $\mathbb{R}^2$?

1.13 Esercizio

Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i. Dire se è continua,
ii. calcolare le derivate parziali nei punti $(x,y) \neq (0,0)$,
iii. calcolare, servendosi dei giusti rapporti incrementali, le derivate parziali in $(0,0)$,
iv. usando la definizione, studiare la differenzibilità di f in $(0,0)$.

1.14 Esercizio

Data $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua e derivabile, determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x,y) = \phi(ax+by)$ soddisfi l'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

1.15 Esercizio

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, sia f definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} a(x^2+y^2)+b & \text{se} \quad x^2+y^2<1 \\ \left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2 & \text{se} \quad x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$$

i. Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $\mathbb{R}^2$? ii. Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ esistono $f_x(1,0)$ e $f_y(1,0)$?

1.16 Esercizio

Sia $f(x,y) = \sin(x^2+y^4)+xy$ e sia assegnata la curva di rappresentazione parametrica

$$\phi(t) = (a_1 t^3 + b_1, a_2 t^2 + b_2, a_3 t + b_3)$$

Si determinino i parametri $a_1, \ldots, b_3$, per i quali
i. la curva passa per il punto $(0,0,0)$ per $t=0$,
ii. in tale punto la retta tangente alla curva appartiene al piano tangente al grafico di f.

1.17 Esercizio

Data la funzione $f(x,y) = y\sqrt{|x|}+2x$ dimostrare che f è differenziabile in $(0,0)$ e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(0,0,0)$.

1.18 Esercizio

Sia $f(x,y) = x^2+y^2$.
i. Calcolare le derivate direzionali $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ nel punto $(1,1)$ al variare di v
ii. Determinare per quali v riesce massimo $\left|\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|$.

1.19 Esercizio

Usare la regola di derivazione delle funzioni composte (**senza scrivere esplicitamente la funzione composta**) per calcolare la derivata di $F(t) = f(x(t), y(t))$ nei seguenti casi

$$f(x,y) = \sin(x)\cos(y) \qquad x(t) = \pi t \quad y(t) = \sqrt{t}$$

$$f(x,y) = x\ln(x+2y) \qquad x(t) = \sin(t) \quad y(t) = \cos(t)$$

1.20 Esercizio

Usare la regola di derivazione delle funzioni composte (**senza scrivere esplicitamente la funzione composta**) per calcolare le derivate parziali di $F(x,y) = f(\xi(x,y),\eta(x,y))$ nei seguenti casi

$$f(\xi,\eta) = \xi^2 + \xi\eta + \eta^2 \qquad \xi(x,y) = x + y \quad \eta(x,y) = xy$$

$$f(\xi,\eta) = \xi/\eta \qquad \xi(x,y) = x\mathrm{e}^y \quad \eta(x,y) = 1 + x\mathrm{e}^{-y}$$

1.21 Esercizio

Sia $g(x,y) = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$ essendo $f(\xi,\eta)$ una funzione differenziabile in $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che g soddisfa l'equazione

$$x\frac{\partial g}{\partial y} + y\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

1.22 Esercizio

Sia $f(x,y)$ una funzione differenziabile in $\mathbb{R}^2$ e siano $g_1(\rho,\theta) = \rho\cos(\theta)$, $g_2(\rho,\theta) = \rho\sin(\theta)$. Detta $F(\rho,\theta) = f\left(g_1(\rho,\theta), g_2(\rho,\theta)\right)$, usando la regola di derivazione delle funzioni composte verificare le seguenti identità

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(\theta) \qquad \frac{\partial F}{\partial \theta} = -\rho\frac{\partial f}{\partial x}\sin(\theta) + \rho\frac{\partial f}{\partial y}\cos(\theta)$$

$$|\nabla f|^2 = \frac{\partial F}{\partial \rho}^2 + \frac{1}{\rho^2}\left|\frac{\partial F}{\partial \theta}\right|^2 \qquad \Delta f = \frac{\partial F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{\partial F}{\partial \theta^2}$$

1.23 Esercizio

Verificare la validità del Teorema di Lagrange per la funzione $f(x,y) = x^2 y - y^2$ tra i punti $P_0 = (0,0)$ e $P_1 = (1,2)$. Quali sono i punti intermedi che verificano la tesi del teorema?

1.24 Esercizio

Scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine di punto iniziale $(0,0)$ per le seguenti funzioni

$$f(x,y) = e^x\cos(y) \qquad g(x,y) = \cos(x+y) \qquad h(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$$

$$k(x,y) = \sin(2x + y + 5x^2 + 4xy + 3y^2)$$