AVVISI

1) foglio di esercizi

entro domani sera, sulla pag. web del corso

2) esercitazione Prof. Montefusco

aula Amaldi, martedì 6/10 ore 14:30

(Facoltativa ma fortemente consigliata)

3) ricevimento studenti (oltre ai soliti lunedì e giovedì)

- Se non c'è esercitazione, martedì 15:00 → 16:30
- se c'è esercitazione, dopo l'esercitazione martedì 6/10, dalle ore 16:45

Formula di Taylor del primo ordine, con resto di Lagrange

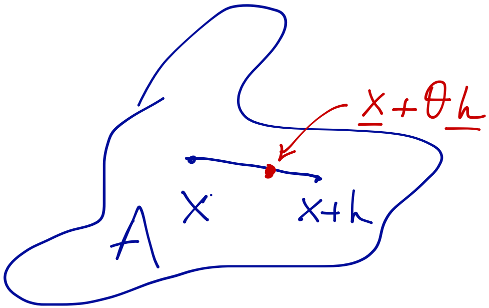
$A \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $f \in C^2(A)$. Siano $\underline{x}, \underline{x}+\underline{h} \in A$ t.c. il segmento di estremi $\underline{x}, \underline{x}+\underline{h}$ sia contenuto interamente in A.

Allora $\exists\, \theta \in (0,1)$ t.c.

$$f(\underline{x}+\underline{h}) = f(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{N} f_{x_i}(\underline{x})\, h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} f_{x_i x_j}(\underline{x}+\theta\underline{h})\, h_i h_j$$

$$= f(\underline{x}) + \nabla f(\underline{x})\cdot \underline{h} + \frac{1}{2}\left(D^2 f(\underline{x})\, \underline{h}, \underline{h}\right)$$

$(\underline{x}+\theta\underline{h})$



OSS La formula vale anche per punti ben distanti tra loro.

DIM Usiamo una funzione ausiliare:

$$F(t) = f(\underline{x} + t\underline{h}) \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$F(0) = f(\underline{x}) \qquad F(1) = f(\underline{x} + \underline{h})$$

Per Taylor in 1 variabile

$$\underset{f(\underline{x}+\underline{h})}{F(1)} = \underset{f(\underline{x})}{F(0)} + \underbrace{F'(0)\,1}_{\nabla f(\underline{x})\cdot\underline{h}} + \frac{1}{2}\underbrace{F''(\theta)\,1^2}_{\sum_{i,j=1}^{N} f_{x_i x_j}(\underline{x}+\theta\underline{h})\,h_i h_j}$$

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{N} f_{x_i}(\underline{x}+t\underline{h}) \underbrace{\frac{d}{dt}(x_i + t h_i)}_{h_i} = \sum_{i=1}^{N} f_{x_i}(\underline{x}+t\underline{h})\,h_i =$$

$$= \nabla f(\underline{x}+t\underline{h}) \cdot \underline{h}$$

$$F''(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(f_{x_i}(\underline{x}+t\underline{h})\right) h_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} f_{x_i x_j}(\underline{x}+t\underline{h})\, h_j\, h_i$$

TEOREMA $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}$ $f \in C^2(A)$

$\underline{x} \in A$. Allora

$$f(\underline{x}+\underline{h}) = f(\underline{x}) + \nabla f(\underline{x})\cdot \underline{h} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(D^2 f(\underline{x})\cdot \underline{h}, \underline{h}\right)}_{\sum_{i,j=1}^{N} f''_{x_i x_j}(\underline{x})\, h_i h_j} + o(\|\underline{h}\|^2)$$

per $\underline{h} \to \underline{0}$

Cioè: $$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{f(\underline{x}+\underline{h}) - f(\underline{x}) - \nabla f(\underline{x})\cdot \underline{h} - \frac{1}{2}\left(D^2 f(\underline{x})\,\underline{h}, \underline{h}\right)}{\|\underline{h}\|^2 \left(= h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_N^2\right)} = 0.$$

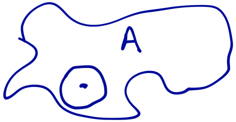
Spesso si scrive x_0 al posto di x, $\underline{x}$ al posto di $\underline{x}+\underline{h}$

$$f(\underline{x}) = f(x_0) + \nabla f(\underline{x}_0)\cdot(x - x_0) + \frac{1}{2}\left(D^2 f(\underline{x}_0)(\underline{x}-\underline{x}_0), \underline{x}-\underline{x}_0\right) + o(\|\underline{x}-\underline{x}_0\|^2)$$

per $\underline{x} \to \underline{x}_0$

DIM. (con l'ipotesi leggermente più forte $f \in C^3(A)$)

Prendiamo una palla $B_r(\underline{x})$, con r t.c. $\overline{B_r(\underline{x})} \subset A$



Prendo $\|\underline{h}\| < r \Rightarrow$ il segmento di estremi $\underline{x}$, $\underline{x}+\underline{h}$ è tutto contenuto in A.

$$F(t) = f(\underline{x} + t\underline{h})$$

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \frac{1}{3!} F'''(\theta)\, 1^3 \qquad \theta \in (0,1)$$

$$f(\underline{x}+\underline{h}) = f(\underline{x}) + \nabla f(\underline{x}) \cdot \underline{h} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} f_{x_i x_j}(\underline{x})\, h_i h_j + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k} f_{x_i x_j x_k}(\underline{x} + \theta \underline{h})\, h_i h_j h_k$$

sviluppo di Taylor del 2° ordine con resto di Lagrange

OSS le derivate terze sono continue in $\overline{B_R}$ chiuso e limitato

$\Rightarrow$ per Weierstrass sono limitate in $\overline{B_R}$

$$\left|f_{x_i x_j x_k}(\underline{x}+\theta\underline{h})\,h_i h_j h_k\right| = \underbrace{\left|f_{x_i x_j x_k}(\cdots)\right|}_{\leq\, C} \underbrace{|h_i|}_{\leq\, \|\underline{h}\|}|h_j||h_k| \leq C\,\|\underline{h}\|^3$$

$$= o(\|\underline{h}\|^2) \quad \text{per } \underline{h}\to\underline{0}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k} f_{x_i x_j x_k}(\underline{x}+\theta\underline{h})\,h_i h_j h_k = o(\|\underline{h}\|^2)$$

$\square$

COROLLARIO DELLA DIM.

Sviluppo di Taylor di ordine superiore.

$f \in C^n(A)$, $\underline{x} \in A$

$$\Rightarrow f(\underline{x}+\underline{h}) = f(\underline{x}) + \nabla f(\underline{x}) \cdot \underline{h} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} f_{x_i x_j}(\underline{x})\, h_i h_j +$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!} \sum_{i_1, i_2 \dots i_n = 1}^{N} f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}}(\underline{x})\, h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_n} + o(\|\underline{h}\|^n)$$

per $\underline{h} \to 0$

A COSA SERVE TUTTO CIÒ ??

Essenzialmente: per studiare max. e min. locali (relativi).

$f(x):(a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad C^1(a,b)$

$x_0 \in (a,b)$. Se x_0 è p.to di max/min relativo per f

$$\underset{\text{Fermat}}{\Longrightarrow} \quad f'(x_0)=0$$

Viceversa, se $f'(x_0)=0$, come vedo se è max. rel, min. rel. oppure flesso?

$f''(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0$ è pto di min. relativo

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è max. rel.

$$f''(x_0) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow \text{flesso} \\ f'''(x_0) = 0 \Rightarrow f^{(iv)}(x_0) \ldots \end{cases}$$

Se $f(x,y): A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ammette un p.to di max. o min relativo (x_0,y_0), e se f è derivabile parzialmente in (x_0,y_0)

<u>allora</u> $\nabla f(x_0,y_0) = 0$. <u>IMPORTANTE</u>: A aperto, oppure (x_0,y_0) interno.

<u>N.B.</u> (x_0,y_0) p.to di <u>max. assoluto</u> per f significa

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in A$$

(x_0,y_0) p.to di <u>max relativo</u> significa

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in B_r(x_0,y_0) \cap A$$

p.to di max. relativo stretto

$$f(x_0,y_0) > f(x,y) \quad \forall (x,y) \in B_r(x_0,y_0) \cap A \setminus \{(x_0,y_0)\}$$

Se $\nabla f(\underline{x}_0, y_0) = 0$, come vedo se (x_0, y_0) è pto di min. rel., max. rel. oppure pto di sella?

ESERCIZIO: Scrivere lo sviluppo di Taylor del 2° ordine per $f(x,y)=\sqrt{x+y^2}$ con punto iniziale $(0,2)$

$f(0,2)=2$

$$f_x(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{x+y^2}} \Longrightarrow f_x(0,2)=\frac{1}{4}$$

$$f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x+y^2}} \Longrightarrow f_y(0,2)=1$$

$$f_{xx}(x,y)=-\frac{1}{4}\,\frac{1}{(x+y^2)^{3/2}} \Longrightarrow f_{xx}(0,2)=-\frac{1}{32}$$

$$f_{xy}(x,y)=-\frac{1}{2}\,\frac{y}{(x+y^2)^{3/2}} \Longrightarrow f_{xy}(0,2)=-\frac{1}{8}=f_{yx}(0,2)$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{\sqrt{x+y^2}-y\,\frac{y}{\sqrt{x+y^2}}}{(x+y^2)}=\frac{x+\cancel{y^2}-\cancel{y^2}}{(x+y^2)^{3/2}} \Longrightarrow f_{yy}(0,2)=0$$

$$\sqrt{x+y^2} = 2 + \frac{1}{4}x + (y-2) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{32}x^2 - \frac{2}{8}x(y-2)\right) +$$

$$+ o\left(x^2 + (y-2)^2\right)$$

per $(x,y) \to (0,2)$