SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Corso di Laurea in Biotecnologie Agro–Industriali
Prova scritta di Fisica - A.A. 2014-15 - 14 settembre 2015

(1) Quattro studenti sono disposti ai vertici di un quadrato sul ponte di una nave che si muove a 18 km/h parallelamente a uno dei lati del quadrato. I ragazzi si lanciano una palla in modo che questa percorra i lati del quadrato a una velocità di 3.0 m/s. Calcola i vettori velocità (e i rispettivi moduli) della palla misurati da una persona che si trova su un'imbarcazione ancorata vicino la nave.
(2) Un raggio di luce che passa dall'aria all'interno di una sostanza il cui indice di rifrazione è $n = 1.33$ ha frequenza $\nu = 5.5 \times 10^{14}$ Hz. Calcolate la lunghezza d'onda della luce nell'aria e nella sostanza.
(3) Un recipiente di $6.1\,\ell$ alla temperatura di 21°C contiene una mole di gas monoatomico. Il gas è fatto espandere fino a un volume di $9.1\,\ell$ in modo tale da lasciarne invariata la pressione. Quanto lavoro produce e quanto calore assorbe il gas in questa trasformazione?

(1) Prima di tutto scriviamo i dati per bene: $v_N = 18$ km/h che corrispondono a

$$v_N = 18\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 18\,\frac{1\,000\,\text{m}}{3\,600\,\text{s}} = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,,$$

e $v_p = 3$ ms^{-1}. Supponiamo ora che la nave si muova verso sinistra e cominciamo a considerare il caso in cui lo studente in alto a destra lancia la palla a quello in alto a sinistra. Un osservatore fermo vedrà la palla muoversi a una velocità di

$$v_{\leftarrow} = 5 + 3 = 8\,\text{ms}^{-1}\,.$$

lungo la direzione orizzontale, mentre lungo quella verticale la palla ha velocità nulla. In un sistema di assi in cui l'asse x è orientato verso sinistra e quello y verso l'alto, il vettore velocità è dunque

$$\mathbf{v}_{\leftarrow} = (8, 0)\ .$$

Quando lo studente lancia la palla a quello in basso a sinistra, questa ha una componente orizzontale che vale 5 in unità SI, e una verticale pari a -3 nelle stesse unità, perciò

$$\mathbf{v}_{\downarrow} = (5, -3)\ .$$

Lo studente quindi lancia la palla verso destra. La nave si sposta con velocità $(5, 0)$, la palla con velocità $(-3, 0)$, perciò abbiamo

$$\mathbf{v}_{\rightarrow} = (2, 0)\ .$$

Infine la palla è lanciata verso l'alto e, mentre la nave si sposta sempre con velocità $(5, 0)$, la palla ha velocità $(0, 3)$ e quindi

$$\mathbf{v}_{\uparrow} = (5, 3)\ .$$

I moduli valgono, rispettivamente, $v_{\leftarrow} = 8$ ms^{-1}, $v_{\rightarrow} = 2$ ms^{-1}, $v_{\uparrow} = \sqrt{5^2 + 3^2} \simeq 5.8$ ms^{-1} e $v_{\downarrow} = \sqrt{5^2 + (-3)^2} \simeq 5.8$ ms^{-1}

(2) Per ricordare la relazione esistente tra frequenza e lunghezza d'onda basta ricordare che la frequenza è un tempo alla meno uno e la lunghezza d'onda è una lunghezza. Perciò, per ragioni dimensionali, dev'essere

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

dove c è la velocità della luce. Nell'aria e nel vuoto $c = 3 \times 10^8$ m/s. Abbiamo dunque

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{5.5 \times 10^{14}} \simeq 0.545 \times 10^{-6} = 545\,\text{nm}\,.$$

Nella sostanza la velocità della luce è $v = c/n$, quindi avremo

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{1.33 \times 5.5 \times 10^{14}} \simeq 0.410 \times 10^{-6} = 410\,\text{nm}\,.$$

(3) Quando il gas si espande a pressione costante compie un lavoro pari a $L = p\Delta V$, per conoscere il quale è necessario conoscere il valore della pressione, che si ricava facilmente dall'equazione di stato dei gas

$$p = \frac{nRT}{V}\,.$$

Nel caso in esame $n = 1$, $V = 6.1\,\ell$ e $T = 21 + 273 = 294$ K (ricordate che bisogna sempre usare la temperatura assoluta). Se scriviamo il volume in metri cubi possiamo usare la costante dei gas in unità SI che vale 8.314. Il volume di $6.1\,\ell$ corrisponde a un volume di 6.1×10^{-3} m^3, quindi

$$p = \frac{8.314 \times 294}{6.1 \times 10^{-3}} \simeq 4.0 \times 10^5\,\mathrm{Pa}\,.$$

Il lavoro compiuto dunque vale

$$L = 4.0 \times 10^5\,(9.1 - 6.1) \times 10^{-3} = 1\,200\,\mathrm{J}\,.$$

Per espandersi il gas ha bisogno di assorbire calore in misura pari a

$$\Delta Q = nc_p\Delta T$$

dove ΔT è la differenza di temperatura. Dobbiamo perciò conoscere la temperatura finale che vale

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{4 \times 10^5 \times 9.1 \times 10^{-3}}{8.314} \simeq 438\,\mathrm{K}\,,$$

per cui $\Delta T = 438 - 294 = 144$ K. Il calore specifico a pressione costante c_p è legato a quello a volume costante dalla relazione $c_p = c_V + R$ e $c_V = \frac{3}{2}R$. Abbiamo perciò

$$c_p = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R = 20.785\,.$$

Si ottiene cosí che

$$\Delta Q = 20.785 \times 144 \simeq 2\,993\,\mathrm{J}\,.$$

Si poteva anche ricavare ΔQ dal primo principio della termodinamica, naturalmente. Essendo $\Delta U = \Delta Q - \Delta L$, sappiamo che U è una funzione di stato per cui

$$\Delta U = nc_V\Delta T = \frac{3}{2}R\Delta T = 1\,796\,\mathrm{J}$$

e quindi

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta L = 1\,200 + 1\,796 = 2\,996\,\mathrm{J}$$

che entro gli errori (non esplicitati, ma evidenti dal fatto che i numeri del problema sono dati con un'approssimazione sulla prima cifra decimale) coincide con quanto già trovato.