Settimana 7 - 10 dicembre:

Lun. 7 dicembre le lezioni di Analisi e Geometria si svolgeranno solo online via Zoom negli orari già previsti

Giov. 10 dicembre:

Geom. salta

Analisi: 3 ore online (14:30 → 17:30) via Zoom.

DEF modulo di un numero complesso.

Se $z = x+iy$, poniamo $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$

$|2-3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

cioè: è reale ed è ≥ 0

$x, y \in \mathbb{R}$

Proprietà del modulo.

1) $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (cioè: $|z| \in \mathbb{R}, |z| \geq 0$)

2) $|z| = 0 \iff z = 0 \iff$ (se $z = x+iy$) $x = y = 0$

(dim: se $|z| = 0 \iff \sqrt{x^2+y^2} = 0 \iff x = y = 0$)

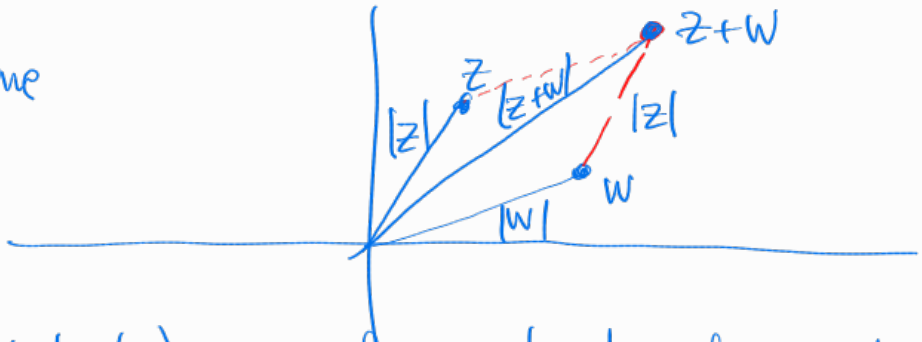
3) $|zw| = |z||w| \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}$

(dim: $z = x+iy$, $w = a+ib \Rightarrow$ fare i conti)

4) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}, \ w \neq 0$

5) $|z+w| \leq |z|+|w| \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}$ (dis. triangolare)

Interpretazione



$|z+w| \leq |z|+|w|$ significa: la lunghezza di un lato di un triangolo è $\leq$ della somma delle lunghezze degli altri due lati

---

Grande differenza con i numeri reali

Nei numeri reali $|x|^2 = x^2$

Nei complessi è falso che $|z|^2 = z^2$.

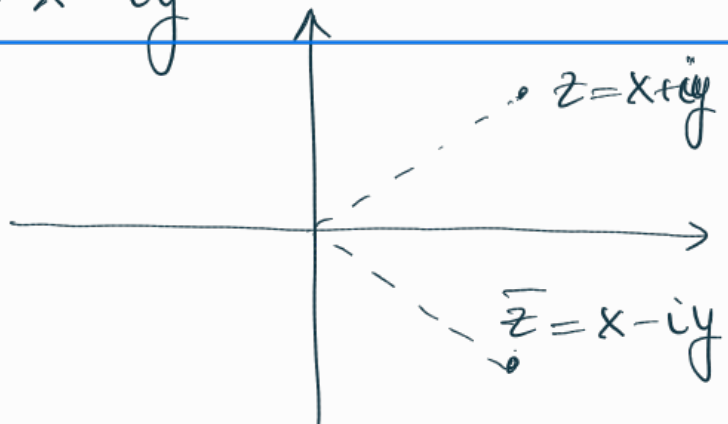
per esempio, se $z = 1+i$.

$$|z|^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2+y^2 = 1^2+1^2 = 2$$

$$z^2 = (1+i)^2 = 1^2 + i^2 + 2i = 1-1+2i = 2i$$

$$|z|^2 \neq z^2$$

DEF Sia $z = x+iy$, si dice **coniugato** di z il numero $\bar{z} = x-iy$



Proprietà del coniugio

1) $\overline{(\overline{z})} = z \qquad \forall z \in \mathbb{C}$.

2) $\overline{(z+w)} = \overline{z} + \overline{w}$

Infatti, se $z = x+iy$, $w = a+ib$

$\Rightarrow z+w = (x+a)+i(y+b) \Rightarrow \overline{z+w} = x+a-i(y+b)$

$\overline{z}+\overline{w} = (x-iy)+(a-ib) = (x+a)+i(-y-b)$

3) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w} \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}$.

$\overline{zw} = \overline{(x+iy)(a+ib)} = \overline{ax-by+i(bx+ay)} =$

$= ax-by-i(bx+ay)$.

$\overline{z}\,\overline{w} = (x-iy)(a-ib) = ax-by+i(-bx-ay)$

4) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{(\overline{z})}{(\overline{w})}$

5) $z\overline{z} = |z|^2 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$.

$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2-(iy)^2 = x^2+y^2 = |z|^2$

6) oss $\qquad z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

7) $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Esempio

$$\frac{1}{3-2i} = \frac{3+2i}{3^2+(-2)^2} = \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13} + i\frac{2}{13}.$$

Equazioni nei numeri complessi

$$z + i(\overline{z})^2 = -2i \qquad (*)$$

Voglio trovare tutti i valori $z \in \mathbb{C}$ che rendono vera $(*)$

Pongo $z = x+iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$

$$(x+iy) + i(x-iy)^2 = -2i$$

$$x+iy + i(x^2 - y^2 - 2ixy) = -2i$$

$$x+iy + ix^2 - iy^2 + 2xy = -2i$$

OSS Questi due numeri complessi sono uguali $\iff$ le parti reali sono uguali e le parti immaginarie sono uguali

$$\begin{cases} x + 2xy = 0 \\ y + x^2 - y^2 = -2 \end{cases} \iff x(1+2y) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(x=0) \vee \left(y = -\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y-y^2=-2 \end{cases}$$

$$y^2-y-2=0$$

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}<\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}$$

Sol^{mi} $x=0$ $y=\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}$

$\boxed{z=-i}$

$\boxed{z=2i}$

$$\begin{cases} y=-1/2 \\ -\frac{1}{2}+x^2-\frac{1}{4}=-2 \end{cases}$$

$$x^2=-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}<0$$

nessuna sol^{ve} (x è reale)

Queste sono le uniche sol^{mi}

$$z+\bar{z}-3\,\mathrm{Im}\,z=z^2+|z|$$

Pongo $z=x+iy$

$$(x+iy)+(x-iy)-3y=(x+iy)^2+\sqrt{x^2+y^2}$$

$$x^2-y^2+2ixy$$

$$2x-3y=x^2-y^2+2ixy+\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} 2x-3y=x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2} \\ 2xy=0 \end{cases} \iff (x=0)\vee(y=0)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -3y = -y^2 + \sqrt{y^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ 2x = x^2 + |x| \end{cases}$$

$\sqrt{y^2} = |y|$

$$-3y = -y^2 + |y|$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ -3y = -y^2 + y \end{cases} \qquad \begin{cases} y < 0 \\ -3y = -y^2 - y \end{cases}$$

$$y^2 - 4y = 0 \qquad y^2 - 2y = 0$$

$y = 0 \quad y = 4$ — verifichiamo $y \geq 0$ quindi accettabili

$y = 0 \quad y = 2$ — non accettabili perché non vale $y < 0$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x = x^2 + x \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ 2x = x^2 - x \end{cases}$$

$$x^2 - x = 0 \qquad x^2 - 3x = 0$$

$x = 0$ — OK ma $z = 0$ già trovata

$x = 1$ accettab. $\Rightarrow \boxed{z = 1}$

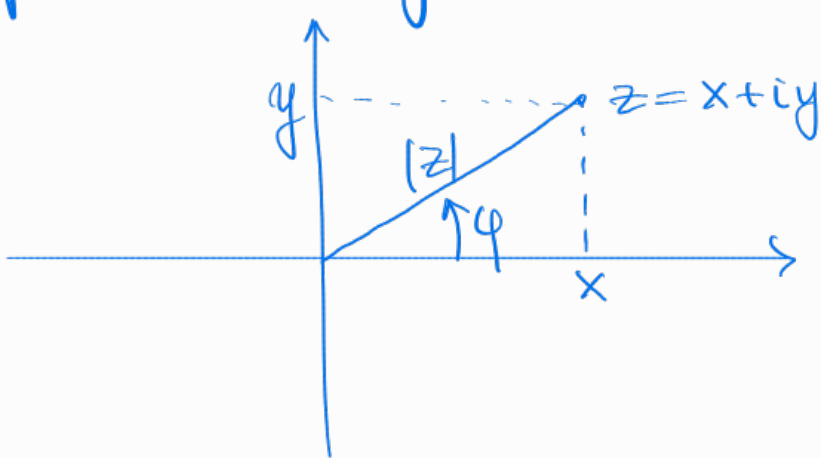
$x = 0 \quad x = 3$ — non accettabili

Sol^mi: $\boxed{z = 0}$ $(x = 0, y = 0)$

$\boxed{z = 4i}$ $(x = 0, y = 4)$

Tre sol^mi: $z = 0$, $z = 1$, $z = 4i$.

Rappresentazione trigonometrica, o polare, dei complessi



Un punto del piano (e quindi, un numero complesso) si può rappresentare con le sue coord. cartesiane x, y oppure con: 1) la distanza dall'origine $|z|$ (modulo)

2) un angolo φ, misurato dal semiasse positivo delle x con la solita orientazione

L'angolo φ si dice argomento di z ed è determinato a meno di multipli di 2π.

Se $z=0$, $|z|=0$ e φ è indeterminato.

Come si passa dalla rappresentazione cartesiana a quella polare e viceversa.

$z = x+iy \quad (x,y \in \mathbb{R})$

Cerco $|z|$ e φ $\qquad |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Usando la trigonometria si trova

$$\begin{cases} x = |z|\cos\varphi \\ y = |z|\sin\varphi \end{cases}$$

$\xrightarrow{z=0}$ se $|z|=0$, φ è indeterminato

se $z\neq 0$, $|z|\neq 0$,

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$

e in tal caso φ è individuato a meno di multipli di 2π.

$$z = x+iy = |z|\cos\varphi + i\,|z|\sin\varphi =$$

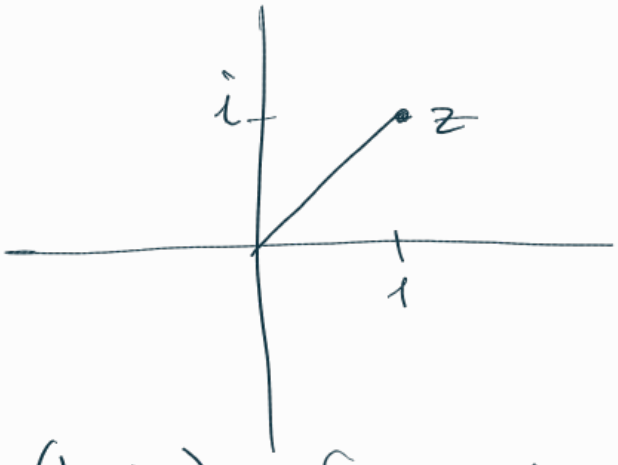
$$= |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

rappresentaz. polare di z

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Esempi

$z = 1 + i$



$|z| = \sqrt{2}$

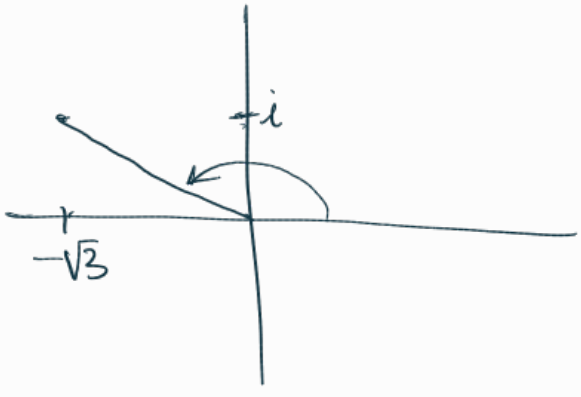
$\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z = -\sqrt{3} + i$

$|z| = \sqrt{3+1} = 2$

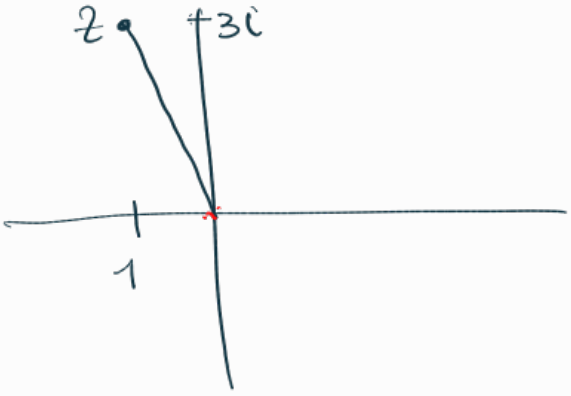


$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{|z|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\varphi = \frac{5}{6}\pi \quad (+2k\pi)$

$z = -1 + 3i$

$|z| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$



$$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \quad (+2k\pi) \qquad \text{OK}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \qquad \pi - \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

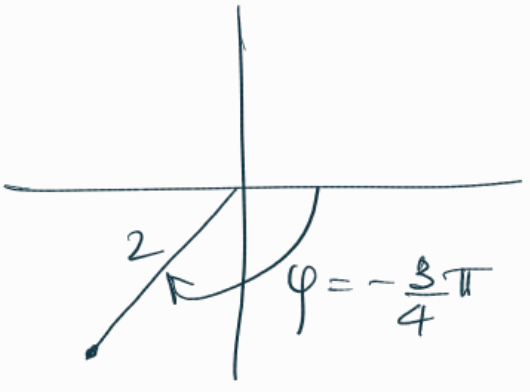
$$\varphi = \operatorname{arctg}(-3) = \operatorname{arctg}(-3) + \pi = \pi - \operatorname{arctg} 3$$

$$-1+3i = \sqrt{10}\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$$

Passaggio inverso (da polari a cartesiane)

$|z| = 2$

$\arg z = \varphi = -\frac{3}{4}\pi$



si trova

$$x = |z|\cos\varphi = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$y = |z|\sin\varphi = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = -\sqrt{2}\,(1+i)$$

Proviamo a moltiplicare due num. complessi usando le coord. polari

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\,\text{sen}\varphi)$$

$$w = |w|\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$$

$$z\,w = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,|w|(\cos\theta + i\sin\theta) =$$

$$= |z||w|\left(\underbrace{\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta}_{\cos(\varphi+\theta)} + i\left(\underbrace{\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta}_{\sin(\varphi+\theta)}\right)\right)$$

$$= |z||w|\left(\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta)\right)$$

Scopriamo che il modulo di zw è $|z||w|$

e che l'argomento di $z \cdot w$ è la somma degli argomenti.

TEOREMA

1) Facendo il prodotto di due numeri complessi, i moduli si moltiplicano, gli argomenti si sommano.

$$z\,w = |z||w|\left(\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta)\right)$$

se $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $\quad w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

equivalentemente:

$$|zw| = |z|\,|w| \quad \text{(già noto)}$$

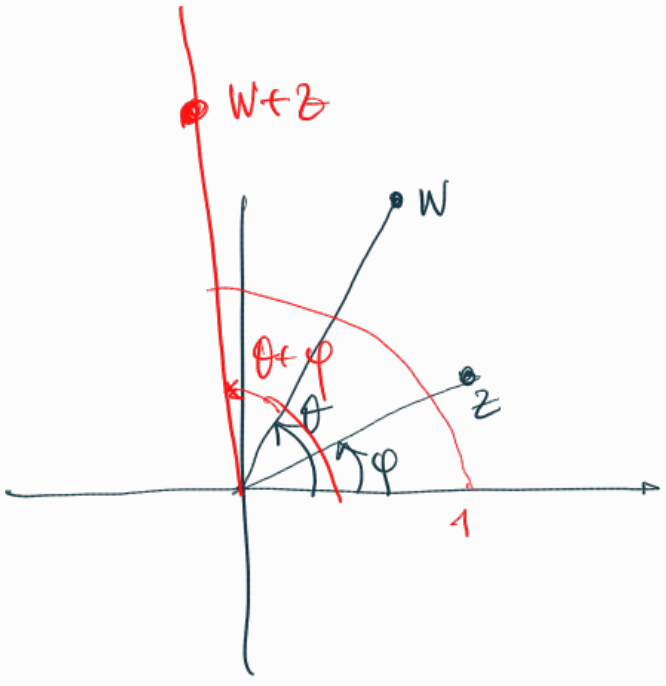
$$\arg(zw) = \arg z + \arg w \ (+2k\pi)$$

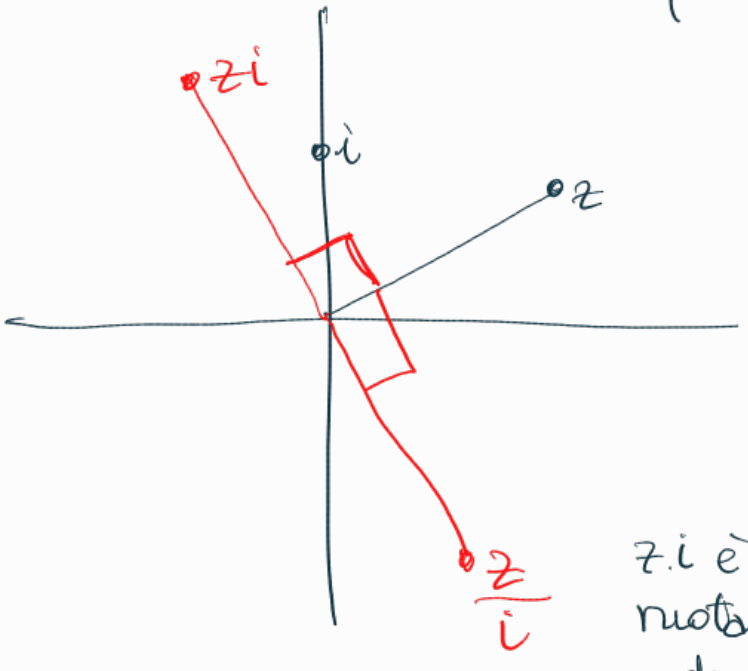
2) Facendo il rapporto di due numeri complessi, i moduli si dividono, gli argomenti si sottraggono, cioè

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\left(\cos(\varphi-\theta) + i\sin(\varphi-\theta)\right)$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \qquad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w \ (+2k\pi)$$

Graficamente, come si moltiplicano due complessi





dove sta $z \cdot i$?

$|i| = 1$

$\arg i = \frac{\pi}{2} \left(+2k\pi\right)$

$z \cdot i$ è ottenuto da z ruotando z in senso antiorario di un angolo retto.

OSS $\quad \frac{1}{i} = \frac{-i}{|i|} = -i$