Data

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{se } x<0\\ a(x^5+1)+bx^2 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

dire per quali valori di $a,b\in\mathbb{R}$ si ha:

a) f è continua in $\mathbb{R}$;

b) f è derivabile in $\mathbb{R}$;

c) f è definitivamente crescente per $x\to+\infty$;

d) f ha un flesso in $x_0=1$.

e) f ammette pto di max. locale in $x_0=1$.

---

a) f è sempre continua fuori dall'origine $x_0=0$.

In $x_0=0$ f è sempre continua da destra.

Continuità da sinistra

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \overset{?}{=} f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = a \qquad f(0)=a$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(2x)}{x}=2.$$

Risposta a): $a=2,\ b\in\mathbb{R}$

---

b) f derivabile in $\mathbb{R}$. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{se } x<0\\ a(x^5+1)+bx^2 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

$a=2$

f sempre derivabile in $x\neq 0$.

Derivabilità in $x_0=0$.

Per essere derivabile deve essere continua $\Rightarrow a = 2$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (10x^4 + 2bx) = 0$$

Deve essere $f'_-(0) = 0$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(2x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2\cos(2x)\,x - \sin(2x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2x(1 + o(x)) - (2x + o(x^2))}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$$

$\cos(2x) = 1 + o(x)$

$\sin(2x) = 2x + o(x^2)$

$\sin t = t + o(t^2) \quad t \to 0$

per Taylor!

Risposta b) $\quad a = 2, \; b \in \mathbb{R}$

---

c) f def^{te} crescente per $x \to +\infty$

per $x > 0 \quad f(x) = a(x^5 + 1) + bx^2$

$$f'(x) = 5ax^4 + 2bx \geq 0 \quad \text{def}^{te} \text{ per } x \to +\infty$$

- se $a > 0 \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty \Rightarrow f'(x) > 0$ def^{te} per $x \to +\infty$

- se $a < 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty \Rightarrow$ $f'(x) < 0$ def^{te} NON VA BENE.

Ok!

• se $a=0$, $f'(x)=2bx$ defte ≥ 0 se $b\geq 0$

Risposta c) $(a>0, b\in\mathbb{R}) \vee (a=0, b\geq 0)$

---

d) f ha un flesso in $x_0=1$

Vicino a $x_0=1$, $f(x)=a(x^5+1)+bx^2$

$f'(x)=5ax^4+2bx$

$f''(x)=20ax^3+2b$

Deve essere $f''(1)=0 \iff 20a+2b=0$

$\iff b=-10a$

Calcolo $f'''(1)=60a$

• se $a>0 \Rightarrow f''$ cambia segno attraversando $x_0=0$

$\Rightarrow$ flesso ok!

• se $a<0 \Rightarrow$ stessa conclusione ok.

• se $a=0$, $b=-10a \Rightarrow f(x)\equiv 0 \Rightarrow$ flesso in ogni punto

Soluz. d) $a\in\mathbb{R}$, $b=-10a$

---

e) f ammette max. locale in $x_0=1$.

$f'(x)=5ax^4+2bx$

Thm. Fermat $\Rightarrow$ deve essere $f'(1)=0$

$$52+2b=0 \iff \boxed{b=-\frac{5}{2}a}$$

Calcolo $f''(1)$

$$f''(x)=20ax^3+2b$$

$$f''(1)=20a+2b=20a-5a=15a$$

- se $a\geq 0$ $\quad f'(1)=0,\ f''(1)>0 \Rightarrow x_0=1$ min. locale stretto non acc.
- se $a<0$ $\quad f'(1)=0, f''(1)<0 \Rightarrow x_0=1$ max. locale stretto ok
- se $a=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow f(x)\equiv 0$ per $x\geq 0$
  $\Rightarrow$ tutti i pti sono di max. ok!

Soluz. di e) $\quad a\leq 0, \quad b=-\frac{5}{2}a$

Formula del resto di Taylor di Lagrange

Sia f derivabile $n+1$ volte in (a,b) $\quad x_0\in(a,b)$

Sia $T_n(x)$ il polinomio di Taylor di ordine n di f centrato in x_0.

Allora
$$f(x)=T_n(x)+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{E_n(x)}$$

dove c è compreso tra x e x_0.

Se voglio sperare che $\lim_{n\to+\infty} E_n(x)=0$ è preferibile che $x-x_0$ sia piccolo, perché c'è $(x-x_0)^{n+1}$.

Esempio Voglio calcolare $\sqrt{17}$ con un errore inferiore a 10^{-6}

1° modo) $\sqrt{17} = \sqrt{1+16}$

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$$

Per Maclaurin

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1/2 \cdot (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \cdots (\frac{1}{2}-k+1)}{k!}$$

Prendo $x = 16$

$$f(16) = \sqrt{17} = \sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} \underbrace{16^k}_{2^{4k}} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} 16^{n+1}$$

$0 < c < 16$

$f(x) = \sqrt{1+x}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$

$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})(1+x)^{-3/2}$ $\qquad f^{(k)}(x) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2}-k+1)(1+x)^{\frac{1}{2}-k}$

$$f^{(n+1)}(c) = \frac{1}{2}(-\tfrac{1}{2})\cdot(-\tfrac{3}{2})\cdots(\tfrac{1}{2}-n)(1+c)^{\frac{1}{2}-n-1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1-2n}{2})}{(1+c)^{n+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{(-1)^n \; 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^{n+1} \; (1+c)^{n+1/2}}$$

$$|E_n(16)| = \left| \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^{n+1} \; (1+c)^{n+1/2} \; (n+1)!} \; 16^{n+1} \cdot 2^{4n+4} \right| =$$

$$= \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \; 2^{3n+3}}{(1+c)^{n+\frac{1}{2}} \; (n+1)!} \leq \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \; 2^{3n+3}}{(n+1)!}$$

$0 < c < 16$

Purtroppo (usando il criterio del rapporto) questa quantità va a $+\infty$ per $n \to +\infty$

Tentativo fallito perché $x_0 = 0$ e $x = 16$ sono troppo distanti!

2° modo $\qquad \sqrt{17} = \sqrt{16+1} = 4\sqrt{1+\frac{1}{16}}$

$$f(x) = 4\sqrt{1+x} \qquad x_0 = 0, \quad x = \frac{1}{16}$$

$$f(x) = 4 \sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$x = \frac{1}{16}$$

$$\sqrt{17} = f\left(\frac{1}{16}\right) = 4 \sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} \frac{1}{16^k} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \frac{1}{16^{n+1}}$$

E_n

$$|E_n| = \frac{4\cdot(3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1))}{2^{n+1}\,16^{n+1}\,(1+c)^{n+1/2}\,(n+1)!} \leq \qquad \left(0<c<\frac{1}{16}\right)$$

$16^{n+1} = 2^{4n+4}$

$$\leq \frac{4\cdot(3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1))}{2^{5n+5-2}\,(n+1)!} =$$

$$= \frac{3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}{2^{5n+3}\,(n+1)!}$$

Con il criterio del rapporto si vede che questo tende a zero per $n\to+\infty$.

Voglio che questa quantità sia $< 10^{-6}$

$$\frac{3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}{2^{5n+3}\,(n+1)!} < 10^{-6}$$

Per tentativi, prendo $n=4$

$$\frac{3\cdot5\cdot7}{2^{23}\,5!} \overset{?}{<} 10^{-6}$$

$$2^{23}\cdot 5! > 3\cdot5\cdot7\cdot10^6$$

$2^{23} \sim 8\cdot10^6$

basta verificare

$$8\cdot10^6\cdot5! > 3\cdot5\cdot7\cdot10^6$$

$$8\cdot120 > 105 \qquad \text{ok!}$$

Valore approx. di $\sqrt{17}$

$$T_4\left(\frac{1}{16}\right) = 4\sum_{k=0}^{4}\binom{1/2}{k}\frac{1}{16^k}$$ si calcola facilmente

---

Numeri complessi

parte reale di z — parte immaginaria

Sono somme formali del tipo $z = x + iy$

dove $x, y \in \mathbb{R}$, i è un simbolo t.c. $i^2 = -1$

i: unità immaginaria

OSS $x = Re(z)$

$y = Im(z) \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{C} = \{\text{numeri complessi}\} = \{z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

Operazioni tra numeri complessi

Somma

$z = 3 - 2i \qquad w = 1 + 4i$

$$z + w = (3 - 2i) + (1 + 4i) = 4 + 2i$$

In generale, se $z = x_1 + iy_1$

$w = x_2 + iy_2$.

$$z + w = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Prodotto

$$(3 - 2i)(1 + 4i) = 3 + 12i - 2i - 8i^2 =$$

$i^2 = -1$

$$= (3+8) + (12-2)i = 11 + 10i$$

In generale, se $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 \, z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Tra i numeri complessi ci sono i numeri con parte immaginaria nulla

si pone $3 + 0i = 3$ e si identifica con il numero reale 3.

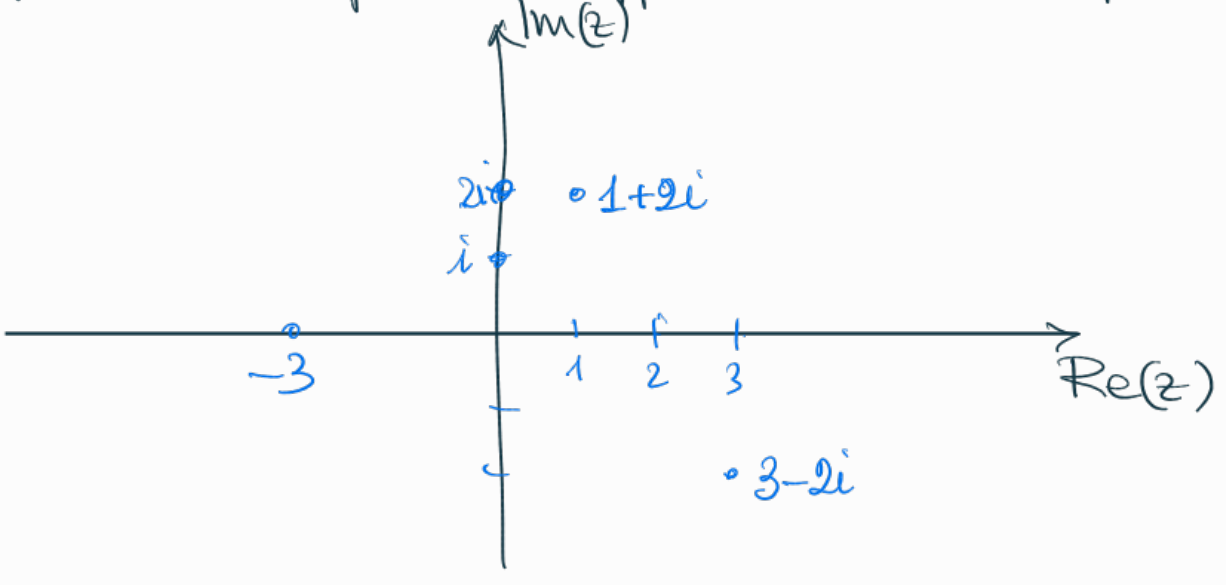
Con questa identificazione i numeri reali $x \in \mathbb{R}$ si identificano con i numeri complessi $x + 0i$ e le operazioni su tali numeri coincidono con quelle sui numeri reali.

In questo senso $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

I numeri con parte reale nulla

$$z = 0 + iy = iy$$ si dicono immaginari puri.

I numeri complessi si appresentano su un piano cartesiano



Proprietà delle operazioni sui complessi

Valgono le ordinarie proprietà (associativa, commutativa, distributiva).

L'elemento neutro rispetto alla somma è $0+i0=0$

$$z+0=z \quad \forall z\in\mathbb{C}$$

L'opposto di $z=x+iy$ è $-z=-x-iy$

L'elemento neutro rispetto al prodotto è $1=1+0i$

$$z\cdot 1=z \quad \forall z$$

Dato $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, qual è il reciproco?

Dato $z=a+ib\neq 0$, quindi a,b non entrambi nulli. Cerco il reciproco $z^{-1}=x+iy$

t.c. $z\cdot z^{-1}=(a+ib)(x+iy)=1$

$$ax-by+i(ay+bx)=1$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} ax-by=1 & \cdot b \\ ay+bx=0 & \cdot a \end{cases}$$

OSS un'equazione nei complessi corrisponde a un sistema 2x2 nei reali.

Cerco x, y

$$\begin{cases} abx-b^2y=b \\ a^2y+abx=0 \end{cases} \Rightarrow a^2y+b^2y=-b$$

$$\boxed{y=-\frac{b}{a^2+b^2}}$$

denominatore $\neq 0$

$$x = -\frac{a}{b}y = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$z^{-1} = x+iy = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Metodo pratico per ricordarlo

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$(2-5i)^{-1} = \frac{1}{2-5i} \cdot \frac{2+5i}{2+5i} = \frac{2+5i}{4+25} = \frac{2+5i}{29} = \frac{2}{29} + i\frac{5}{29}$$

$$\frac{1+i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{3+2i+3i-2}{9+4} = \frac{1+5i}{13} = \frac{1}{13} + i\frac{5}{13}$$

Importante: nei complessi non esiste un ordinamento compatibile con le operazioni.

DEF modulo di un numero complesso.

Se $z = x+iy$, poniamo $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$

$$|2-3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

cioè: è reale ed è ≥ 0

Interpretazione di $|z|$:

si interpreta come distanza dall'origine

Se $z = x+i0 \in \mathbb{R}$

$$|z| = \sqrt{x^2+0} = \sqrt{x^2} = |x|$$

il modulo coincide con il valore ass. di x

