Sviluppo di Maclaurin di $\operatorname{tg} x$ del 5° ordine

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) \; o(x^6) \qquad x \to 0$$

Abbiamo usato

$$\operatorname{tg} x = (\sin x) \cdot \frac{1}{\cos x}$$

qui si usa $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3)$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)}$$

Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, di

$$f(x) = 3\operatorname{tg} x - 3x - x^3$$

1° modo: con l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{tg} x - 3x - x^3}{x^\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{3(1+\operatorname{tg}^2 x) - 3 - 3x^2}{\alpha x^{\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3(\operatorname{tg}^2 x - x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \text{completare da soli.}$$

2° modo: con Taylor

$$f(x) = 3\operatorname{tg} x - 3x - x^3 = \text{(per lo sviluppo di Maclaurin)}$$

$$= 3\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)\right) - 3x - x^3 =$$

$$= \frac{2}{5}x^5 + o(x^5) \sim \frac{2}{5}x^5$$

infinitesimo di ordine 5.

Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to +\infty$, di

$$f(x) = e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$$

$$= e - e^{x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$$

$x \log\left(1+\frac{1}{x}\right) \to 1$

$$= e\left(1 - e^{x \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1}\right) \sim$$

$x \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 \to 0$

$e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$

$$\sim -e\left[x \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1\right] =$$

$\frac{1}{x} \to 0$

oss

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \qquad t \to 0$$

con $t = \frac{1}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$

$$\Rightarrow \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad x \to +\infty$$

$$= -e\left[x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - 1\right] =$$

$$= -e\left[-\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \sim \frac{e}{2x} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Infinitesimo di ordine 1.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 + \log(\cos x)}{x^4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\left(-\frac{x^4}{12}\right)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Provare con l'Hôpital. Noi usiamo Taylor.

Num: $\frac{1}{2}x^2 + \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$

$= \frac{1}{2}x^2 + \log\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\right) =$

$t'' \to 0$

$\left[\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t \to 0\right]$

$= \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) +$

$+ o\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2\right) =$

$\sim c x^4$

$o(x^4)$

$= \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \sim -\frac{x^4}{12}$

N.B. Il seguente svolgimento è errato.

$\log(\cos x) = \log\left(1 + (\cos x - 1)\right) \sim \cos x - 1 =$

$\cos x - 1 \to 0$

$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - 1$

errato perché si è trascurato il termine di grado 2 di $\log(1+t)$

$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} + \log(\cos x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

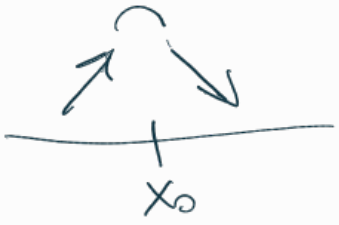
Applicazione del polinomio di Taylor alla classificazione dei punti critici.

Sia x_0 un punto critico di f, cioè $f'(x_0)=0$

x_0 potrebbe essere:
- un pto di max locale
- " " " min "
- un pto né di max né di min locale

Come si capisce? Di solito si studia il segno di f' intorno a x_0, per es.

se $f'(x)>0$ in un intorno sinistro di x_0
$f'(x)<0$ " " destro " "

$\Rightarrow$  x_0 pto di max. locale

In alternativa, si possono calcolare le derivate successive in x_0

$f'(x_0)=0$
$f''(x_0)>0$
$\Rightarrow$ intuitivamente x_0 pto di min. locale.

Enunciamo un risultato rigoroso.

TEOREMA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, sia $x_0\in(a,b)$

Sia $n=2,3,4\dots$, e sia f derivabile n volte in x_0

Supponiamo $f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$

Allora:

1) se n è pari $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{se } f^{(n)}(x_0)>0, & x_0 \text{ è pto di min. locale stretto} \\ \text{se } f^{(n)}(x_0)<0, & x_0 \text{ è pto di max. locale stretto.} \end{cases}$

2) se n è dispari $\Rightarrow$ x_0 non è né di min. né di max locale

Inoltre x_0 è un pto di flesso (a tg orizzontale)

Dim. n pari $(n=2,4,6,\dots)$

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\dots f^{(n-1)}(x_0), \qquad f^{(n)}(x_0)>0$$

Faccio lo sviluppo di Taylor centrato in x_0

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$$

per $x\to x_0$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)=$$

$$=(x-x_0)^n\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\right]>0$$

se $x\neq x_0$ $(x-x_0)^n>0$; $\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\right]>0$ se $x\neq x_0$ e vicino a x_0

$\to \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} > 0$

quindi (permanenza del segno)

$[\quad] > 0$ se x è abbast. vicino a x_0

$\Rightarrow x_0$ è pto di min. locale stretto.

- Se invece n è dispari, stessi conti

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{(x-x_0)^n}_{\text{cambia segno attraversando } x_0} \underbrace{\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right]}_{\text{ha def}^{te} \text{ lo stesso segno di } f^{(n)}(x_0)}$$

$\Rightarrow f(x) - f(x_0)$ cambia segno attraversando x_0

$\Rightarrow$ né max né min. locale.

Vediamo se in questo caso c'è un flesso.
Faccio lo sviluppo di Taylor di $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + o\left((x-x_0)^{n-2}\right) = \quad x \to x_0$$

$$= \underbrace{(x-x_0)^{n-2}}_{\substack{\text{cambia segno attraversando } x_0 \text{ perché} \\ n-2 \text{ è dispari}}} \underbrace{\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!} + o(1) \right]}_{\substack{\text{ha def}^{te} \text{ per } x \to x_0 \\ \text{il segno di } f^{(n)}(x_0)}}$$

$\Rightarrow \quad f''(x_0) = 0, \quad f''(x)$ cambia segno attraversando x_0.

$\Rightarrow$ flesso.

Uso del polinomio di Taylor per il calcolo approssimato.

Finora abbiamo usato il polinomio di Taylor facendo tendere x a x_0, dove x_0 è il punto iniziale dello sviluppo di Taylor e x è il punto in cui calcoliamo $T_n(x)$

$f(x) = T_n(x) + E_n(x)$ questa è la def^ne di $E_n(x)$

Il teorema di Peano dice che, sotto opportune ipotesi,

$$E_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0$$

Invece ora facciamo una cosa diversa:

x_0 e x sono fissati, a una certa distanza tra loro

mi chiedo quanto vale $E_n(x)$

In particolare mi chiedo se $\lim_{n\to+\infty} E_n(x) = 0$.

Esempio $x_0 = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$$

Prendo $x = 1$.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + E_n(1)$$

Mi chiedo se $\lim_{n\to+\infty} E_n(1) = 0$

TEOREMA (resto di Lagrange del polinomio di Taylor)

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in (a,b)

Siano $x_0, x \in (a,b)$, $x \neq x_0$, e sia

$E_n(x) = f(x) - T_n(x)$, dove $T_n(x)$ è il polinomio di Taylor di f con pto iniz. x_0 di ordine n.

Allora $\exists c$ compreso tra x e x_0 t.c

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Quindi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

OSS se $n=0$, questo teorema è già noto:

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$$

è il teorema di Lagrange

Calcolo di e con un errore inferiore a 10^{-3}

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + E_n(x)$$

$x = 1$

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + E_n(1)$$

Voglio trovare, se possibile, n abbastanza grande in modo che

$$|E_n(1)| < 10^{-3}$$

Lagrange

$$E_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\underbrace{(x-x_0)^{n+1}}_{1} = \frac{e^c}{(n+1)!} > 0$$

con $c \in (0,1)$

$$0 < E_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Cerco n t.c. $\quad \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$

$$(n+1)! > 3 \cdot 10^3 = 3000$$

vero per $n+1 = 7 \iff n = 6$

Quindi l'approx. cercata è

$$T_6(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} =$$

$$= \frac{720+720+360+120+30+6+1}{720} = \frac{1957}{720} \approx$$

$$\approx 2{,}71805$$

Il valore di e con la calcolatrice è $e \approx 2{,}7182\,8$

$$E_n = 0{,}00023 < 10^{-3}$$

e la valutazione trovata è un'approx. per difetto.

Calcoliamo $\sin 1$ con un errore $< 10^{-3}$

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{T_{2n+2}(x)} + E_{2n+2}(x)$$

Prendo $x = 1$

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + E_{2n+2}(1)$$

$$E_{2n+2}(1) = \frac{f^{(2n+3)}(c)}{(2n+3)!} \cdot 1^{2n+3} = \frac{\pm \cos c}{(2n+3)!}$$

$$|E_{2n+2}(1)| = \left|\frac{\cos c}{(2n+3)!}\right| \leq \frac{1}{(2n+3)!}$$

Cerco n t.c $\frac{1}{(2n+3)!} < \frac{1}{10^3}$

$$(2n+3)! > 1000$$

ok per $2n+3 = 7 \iff n = 2$

$$\text{sen } 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \underbrace{E_{2n+2}(1)}_{\text{inferiore in modulo a } 10^{-3}}$$

Il valore approx. così trovato vale

$$1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{120 - 20 + 1}{120} = \frac{101}{120} \approx 0,84167$$

Il risultato di sen 1 con la calcolatrice è 0,84147