Polinomio di Maclaurin ($x_0 = 0$) di $f(x) = (1+x)^\alpha$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$f^{(k)}(0) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}_{k \text{ fattori}}$$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} =: \binom{\alpha}{k}$$

coeff^te binomiale generalizzato.

$$\binom{\alpha}{0} := 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

Esempio $\alpha = \frac{1}{2}$, $n = 3$.

$$(1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\binom{\alpha}{1} = \frac{\alpha}{1!} = \alpha \; ; \qquad \binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} = -\frac{1}{8}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} = \frac{3}{2\,6 \cdot 8} = \frac{1}{16}$$

Caso particolare: $\alpha = m \in \mathbb{N}_+$, per es. $m = 4$.

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 + 0$$ stesso resto

è lo sviluppo del binomio di Newton di $(A+B)^4$.

$\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2!} = 6$; $\binom{4}{3} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!} = 4$

$\binom{4}{4} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4!} = 1$ $\binom{4}{5} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0}{5!} = 0$

$\binom{4}{6} = \binom{4}{7} = \dots = 0$

Quindi in questo caso lo sviluppo di Maclaurin coincide con il binomio di Newton.
Ovvio, perché il polinomio di grado ≤ 4 che meglio approssima il polinomio $(1+x)^4$ è lui stesso.

Sviluppo di Maclaurin di $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$f(0) = 1 = 0!$

$f'(x) = +\frac{1}{(1-x)^2}$ $f'(0) = 1 = 1!$

$f''(x) = \frac{+2}{(1-x)^3}$ $f''(0) = 2 = 2!$

$f'''(x) = \frac{2\cdot 3}{(1-x)^4} = \frac{3!}{(1-x)^4}$ $f'''(0) = 3!$

$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ $f^{(k)}(0) = k!$

$\Rightarrow \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k + \underbrace{o(x^n)}_{E_n(x)}$$

Sul resto, definito da $\boxed{E_n(x) = f(x) - T_n(x),}$

possiamo essere molto più precisi

$$E_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Voglio provare che

$$\boxed{\frac{1}{1-x} \stackrel{?}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}} \qquad \forall x \neq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$1 \stackrel{?}{=} (1-x)(1 + x + x^2 + \dots + x^n) + x^{n+1}$$

$$(1-x)(1 + x + x^2 + \dots + x^n) = 1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \dots + \cancel{x^n} - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \cancel{x^3} - \dots - \cancel{x^n} - x^{n+1}$$

$$= 1 - x^{n+1} \qquad \text{vero!}$$

Mettendo $-x$ al posto di x nella formula precedente, si ottiene

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

Mettiamo ora x^2 al posto di x (oss quando $x \to 0$ anche $x^2 \to 0$)

$$\frac{1}{1+x^2} = \underbrace{1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n}}_{T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x)} + o(x^{2n}) \quad o(x^{2n+1})$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o\left(x^{2n+1}\right) \quad \text{per } x \to 0}$$

Questo è il polinomio di Maclaurin di ordine $2n$?

Sì, perché ho trovato un polinomio di ordine $2n$ t.c.

$$\frac{1}{1+x^2} - P_{2n}(x) = o\left(x^{2n}\right) \quad \text{per } x \to 0$$

Trovare il polinomio di Maclaurin di ordine 3 di

$$f(x) = e^{2x} - 3\sin x$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \left(t^3\right) \quad \text{per } t \to 0$$

Pongo $t = 2x \to 0$ per $x \to 0$

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \underbrace{o((2x)^3)}_{o(x^3)}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$f(x) = e^{2x} - 3\sin x = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) +$$

$$-3x + \frac{x^3}{2} =$$

$$= 1 - x + 2x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3)$$

In generale, detto $T_n(x; f)$ il polinomio di Taylor di f centrato in x_0.

f, g derivabili n volte in x_0
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$T_n(x; \alpha f + \beta g) =$$

$$= \alpha\, T_n(x; f) + \beta\, T_n(x; g)$$

Cioè: il polinomio di Taylor di una combinazione lineare di funzioni è la combinaz. lineare dei polinomi di Taylor (linearità)

Cosa succede se derivo un polinomio di Taylor?

$$\left(T_n(x; f)\right)' = \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right)' =$$

$$= f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

$$= T_{n-1}(x; f')$$

$$\boxed{\left(T_n(x; f)\right)' = T_{n-1}(x; f')}$$

Cioè: la derivata del polinomio di Taylor è il polinomio di Taylor della derivata

---

Trovare lo sviluppo di Maclaurin di

$f(x) = \log(1+x)$

Osservo che $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, di cui è già noto lo sviluppo

Per quanto già visto

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^{n-1}) \quad \text{per } x \to 0.$$

$$\log(1+x) = \cancel{f(0)} + \text{un polinomio che, derivato, mi dà questo}$$

$\log 1 = 0$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^n)$$

pongo $k+1 = h$, $k = h-1$, h varia tra 1 e n

$$= \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+1} \frac{x^h}{h} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = \qquad x \to 0$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Metto $-x$ al posto di x nella precedente

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

Sviluppo di Maclaurin di $f(x) = \arctg x$.

Osservo che

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$$

$$\Rightarrow \arctg x = \arctg 0 + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad \text{per } x \to 0$$

$T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Sviluppo di Maclaurin di arcsen x

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(1+t)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k} t^k + o(t^n) \qquad t \to 0$$

Pongo $t = -x^2 \to 0$ per $x \to 0$.

$$(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} + o(x^{2n}) \qquad x \to 0$$

$o(x^{2n+1})$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8} x^4 + o(x^5)$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{(-1/2)(-3/2)}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\arcsin x = \cancel{\arcsin 0}^{\,0} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

Si può osservare (esercizio) che

$$(-1)^k \binom{-1/2}{k} = \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$$

Quindi

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right) \qquad x \to 0$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right) \qquad x \to 0$$

Esercizio per casa: ragionando come per l'arcsin, trovare lo sviluppo di Maclaurin di

$$\operatorname{settsinh} x = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

sfruttando il fatto che la sua derivata vale

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Esercizio: trovare lo sviluppo di Maclaurin di $f(x) = \operatorname{tg} x$ di ordine 5.

1° modo: calcolare con pazienza le derivate:

$$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$f''(x) = 2\operatorname{tg} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x) = 2(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x)$$

2° modo: Usando il fatto che

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)}_{t \to 0}}$$

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3) \qquad \text{per } t \to 0$$

metto al posto di t $\quad \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \to 0$ per $x \to 0$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)} =$$

$$= 1 + \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right) + \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)^2 +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)^3}_{o(x^5)} + \underbrace{o\left(\left(\quad\right)^3\right)}_{o(x^5)} =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) + \frac{x^4}{4} \quad \text{(tutto il resto è } o(x^5)\text{)}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$$

$$\operatorname{tg} x = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5}{24}x^5 + o(x^5)$$

$$-\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} =$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = \frac{25-10+1}{120} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) \qquad x \to 0}$$