Polinomio di Taylor

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0\in(a,b)$, $n\in\mathbb{N}$

Il polinomio di Taylor di f di ordine n con punto iniziale x_0 è il polinomio

$$T_n(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Esempio Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0=4$ di $f(x)=\sqrt{x}$

$$f(x_0)=f(4)=2$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f'(4)=\frac{1}{4}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2},\quad f''(4)=-\frac{1}{4}4^{-3/2}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}=-\frac{1}{32}$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-5/2},\quad f'''(4)=\frac{3}{8}4^{-5/2}=\frac{3}{8}\frac{1}{32}=\frac{3}{256}$$

$$T_3(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{32}\right)(x-4)^2+\frac{1}{2\cancel{6}}\frac{\cancel{3}}{256}(x-4)^3=$$

$$=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3$$

TEOREMA del RESTO di Peano

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0\in(a,b)$.

Sia $T_n(x)$ il polinomio di Taylor di f di ordine n centrato in x_0. Allora

$$f(x)=T_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x\to x_0 \qquad (*)$$

(questo significa $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$.)

Inoltre $T_n(x)$ è l'unico polinomio di grado $\le n$ t.c. valga $(*)$

Ieri l'abbiamo provato fino a $n=3$ con l'ipotesi supplementare che $f\in C^n(a,b)$ (cioè f derivabile n volte con derivate continue)

La dimostrazione usa questa proprietà importante del polinomio $T_n(x)$

$$T_n(x_0)=f(x_0)$$
$$T_n'(x_0)=f'(x_0)$$
$$T_n''(x_0)=f''(x_0)$$
$$T_n'''(x_0)=f'''(x_0)$$
$$\vdots$$
$$T_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$$

Riassunto della dim

$\neq f'(x_0) - T_n'(x_0) = 0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} \overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)-T_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = \dots$$

se $f^{(n)}(x)$ è continua

$$\dots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)-T_n^{(n)}(x)}{n!} = 0$$

Cerchiamo i polinomi di Taylor delle principali funzioni elementari con pto iniziale $x_0 = 0$

(polinomi di Maclaurin)

$f(x) = e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$ $\quad x_0 = 0$, n generico.

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

Il polinomio di Taylor diventa

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad \text{per } x\to 0$$

$f(x) = \sin x$ $\quad x_0 = 0$

$f(0) = 0$; $f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$;

$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = T_{2n+2}(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad x \to 0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$f(x) = \cos x$ $\qquad$ $f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$ $\qquad$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\qquad$ $f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x$ $\qquad$ $f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x$ $\qquad$ $f^{(4)}(0) = 1$

e così via $\qquad$ e così via

$$T_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = T_{2n+1}(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \quad x \to 0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

In modo simile si trova

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad x \to 0$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \qquad x \to 0$$

$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x)$

Uso del polinomio di Taylor per il calcolo dei limiti

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{6x^3} = \frac{1}{6}$$

(già svolto con l'Hopital $\Rightarrow$ viene $\frac{1}{6}$)

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^4) \sim \frac{x^3}{6}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \qquad x \to 0$$

2) Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$ di

$$f(x) = \sin x + x^2 \cos x - x e^x =$$

$$\begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) & x \to 0 \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) & \\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) & x \to 0 \end{cases}$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) + x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) +$$
$$- x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) =$$

$$= \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) + \cancel{x^2} - \frac{x^4}{2} + x^2 o(x^3) +$$
$$- \cancel{x} - \cancel{x^2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + x\, o(x^3) =$$

$x^2 o(x^3) = o(x^5) = o(x^4)$

$x\, o(x^3) = o(x^4)$

$$= -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{2}{3}x^3$$

Infinitesimo di ordine 3.

Si poteva fare anche con l'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x^2 \cos x - x e^x}{x^\alpha}$$

3) Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, di

$$f(x) = 1 - \cos x \cosh x$$

Avevamo già provato che $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x \cosh x}{x^4} = \frac{1}{6}$ (con l'Hôpital.)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad \text{(non basterà!...)} \qquad x \to 0$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$1 - \cos x \cosh x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) =$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^3) + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} o(x^3) =$$

$$= o(x^3)$$

Ho fatto sviluppi troppo brevi, aggiungo termini

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \qquad x \to 0$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$1 - \cos x \cosh x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) =$$

$$= \cancel{1} - \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{24} =$$

$$= x^4\left(-\frac{1}{24}-\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\right)+o(x^5)=\frac{x^4}{6}+o(x^5)\sim\frac{x^4}{6}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

Trovare il polinomio di Maclaurin di ordine 10 di $f(x)=\sin(x^2)$.

1° modo: mi calcolo le derivate di f fino all'ordine

$$f'(x)=2x\cos(x^2),$$

$$f''(x)=2\left[\cos x^2-2x^2\sin x^2\right]$$

$$f'''(x)=$$

scomodo e inefficiente

2° modo

$$\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+o(t^6) \qquad \text{per } t\to 0$$

Poiché, per $x\to 0$, $x^2\to 0$, posso sostituire x^2 al posto di t

$$\sin(x^2)=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}+o(x^{12}) \qquad \text{per } x\to 0$$

Quindi abbiamo trovato un polinomio $P_{10}(x)$ di grado 10 t.c.

$$\sin(x^2)=P_{10}(x)+o(x^{10})$$

Per il teorema di Peano, l'unico di grado ≤ 10 che verifica questo è il polinomio di Taylor.

Quindi la risposta è

$$T_{10}(x) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120}$$

Domanda: Quanto vale $f^{(9)}(0)$ dove $f(x) = \sin(x^2)$?

Poiché il coeff^te di grado 9 del polinomio di Taylor vale $\frac{f^{(9)}(0)}{9!}$, ma dall'espressione precedente vale zero, si ha $f^{(9)}(0) = 0$

Quanto vale $f^{(10)}(0)$?

$$\frac{1}{120} = \frac{f^{(10)}(0)}{10!} \Rightarrow f^{(10)}(0) = \frac{10!}{120}$$

OSS Lo sviluppo di Maclaurin ($x_0 = 0$) di una funzione dispari è fatta solo da potenze dispari
pari — pari

Dim Sia f dispari $\Rightarrow f(0) = 0$ ⇒ manca il termine di grado 0

$\Downarrow$

f' pari

$\Downarrow$

f'' dispari $\Rightarrow f''(0) = 0$ ⇒ manca il grado 2

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$f^{(4)}$ dispari $\quad f^{(4)}(0) = 0$ ⇒ manca il grado 4

Calcolare lo sviluppo di Maclaurin di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (1+x)^\alpha \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1} \qquad f'(0) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$$

Sviluppo di Maclaurin

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) = \quad x \to 0$$

Poniamo $\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} =: \binom{\alpha}{k}$

coeff^ti binomiali generalizzati

$\binom{\alpha}{0} := 1$ per def^ne

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

Per es. $\alpha = \frac{1}{2}$