Esercizi sul teorema di De L'Hôpital

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+5x^2)}{\sqrt{x+1}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{10x}{1+5x^2}\right)}{\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{10x}{1+5x^2} \cdot 2\sqrt{x+1} \quad (\sqrt{x+1} \sim x,\ 1+5x^2 \sim 5x^2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{20\,x^{3/2}}{5x^2} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x^{1/2}} = 0$

---

2) $\lim_{x\to0^+} \frac{x-\sin x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$

($x-\sin x = o(x)$; $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$)

---

3) $\lim_{x\to0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = (1^{+\infty}) =$

$= \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = e^0 = 1.$

$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to0^+} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{H}}{=}$

$= \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to0^+} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} \quad (\sin x \sim x) = (*)$

$\left[\left(\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)' = \left(\log|\sin x| - \log|x|\right)' =\right.$

ma per $x\to0^+$ x e $\sin x > 0$ (tolgo il modulo)

$$= \left(\log(\sin x) - \log x\right)' = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

$$(*) \overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{\cos x} - \cancel{x}\sin x - \cancel{\cos x}}{2\cancel{x}} = 0$$

---

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x \cosh x}{x^4} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cosh x - \cos x \sinh x}{4x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\cos x \cosh x} + \sin x \sinh x + \sin x \sinh x - \cancel{\cos x \cosh x}}{12\,x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \underbrace{\sin x}_{\sim x} \underbrace{\sinh x}_{\sim x}}{12\,x^2} = \frac{1}{6}$$

Studio di funzione:

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x| - \sqrt{3}}$$

1) periodicità: periodica di periodo π

2) simmetrie: è dispari $\Rightarrow$ basta studiarla in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (poi viene esclusa)

3) dominio: $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x \neq \pm\sqrt{3}$

$$x \neq \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$$

La studiamo in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg} x \geq 0$

$\Downarrow$

tolgo il modulo

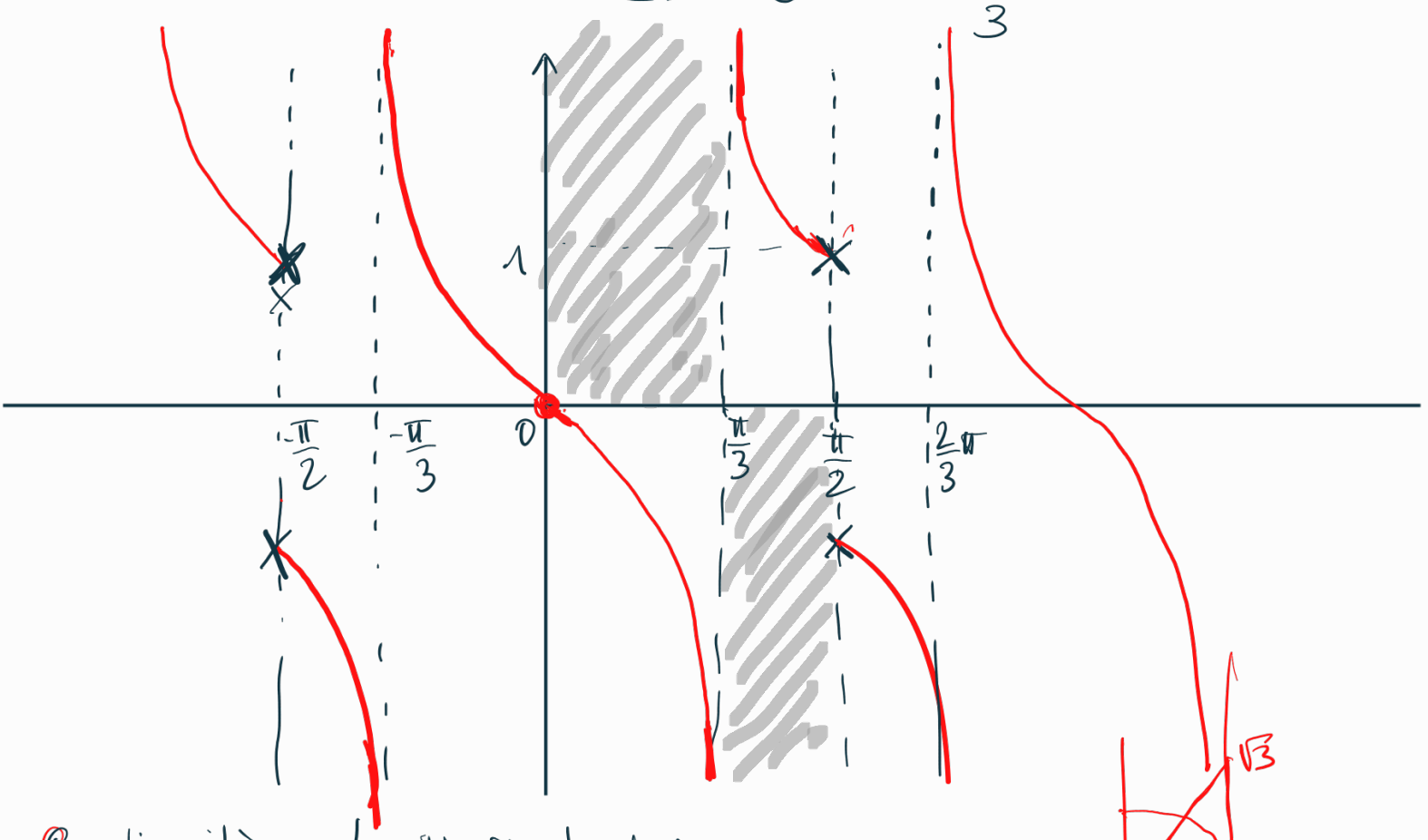
$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}$$

Segno:

$f(x) = 0 \iff x = 0$

$f(x) > 0 \iff \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

$< 0 \iff 0 < x < \frac{\pi}{3}$



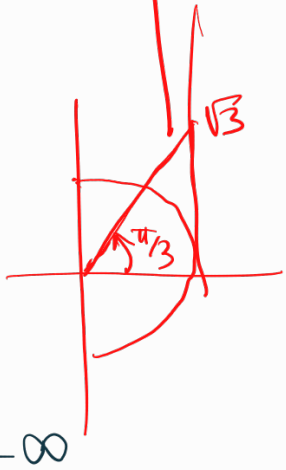
Continuità e limiti significativi

Continua nel suo dominio

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{3}\right)^-} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{3}\right)^-} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{0^-}\right) = -\infty$$

$\operatorname{tg} x \to \sqrt{3}$

$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} \to \sqrt{3}^- \to 0^-$



$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{3})^+} f(x) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{3})^+} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{t-\sqrt{3}} = 1$$

$$\operatorname{tg} x = t \to +\infty$$

OSS $\lim_{x\to+\infty} f(x) \nexists$

Derivata: f è sicuramente derivabile in $(0,\frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$

$$f'(x) = \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}\right)' = \frac{(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) - \operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^2} \qquad (1+\operatorname{tg}^2 x)$$

$$\| \quad f(\operatorname{tg} x) \quad \text{dove } f(t) = \frac{t}{t-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}\,(1+\operatorname{tg}^2 x)}{(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^2} < 0 \quad \forall x \in (0,\tfrac{\pi}{3}) \cup (\tfrac{\pi}{3},\tfrac{\pi}{2})$$

Derivabile in $x=0$ $\quad f'_+(0) = \left.\frac{-\sqrt{3}\,(1+\operatorname{tg}^2 x)}{(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^2}\right|_{x=0} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

$f'_-(0) = f'_+(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad f$ dispari $\Rightarrow f'$ pari

$\Rightarrow f$ derivabile in $x=0$, $\quad f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}) \setminus \{\frac{\pi}{3}\}$

$\Rightarrow$ f è strett. decrescente in $[0, \frac{\pi}{3})$ e in $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

Derivata seconda f è derivabile due volte in $(0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

$$f''(x) = \left(-\frac{\sqrt{3}\,(1+\operatorname{tg}^2 x)}{(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^2} \right)' =$$

derivata di $\operatorname{tg} x$

$$= -\sqrt{3}\,\frac{2\operatorname{tg} x\,(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^{\cancel{2}} - (1+\operatorname{tg}^2 x)\,2\,(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})}{(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^{\cancel{4}\,3}} \quad (1+\operatorname{tg}^2 x)$$

$$= -\sqrt{3}\,\frac{(\cancel{2\operatorname{tg}^2 x} - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 2 - \cancel{2\operatorname{tg}^2 x})}{(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^3}(1+\operatorname{tg}^2 x) =$$

$$= 2\sqrt{3}\,\frac{(\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1)(1+\operatorname{tg}^2 x)}{(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^3} \qquad \forall x \in (0, \tfrac{\pi}{3}) \cup (\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2})$$

$f''(x) = 0$ mai

$f''(x) > 0 \iff x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

$f''(x) < 0 \iff x \in (0, \frac{\pi}{3})$

$f''(0)$?

$$f''_+(0) = \left. \frac{2\sqrt{3}\,(\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1)(1+\operatorname{tg}^2 x)}{(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^3} \right|_{x=0} = \frac{2\sqrt{3}}{-3\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}$$

$f''_-(0) = \frac{2}{3}$ $\quad f$ non è derivabile due volte in $x=0$

f strett. convessa in $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

f strett. concava in $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$

$x=0$ pto di flesso.

Polinomi di Taylor

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile quante volte si vuole $f \in C^\infty(a,b)$

Sia $x_0 \in (a,b)$.

Pb. 0) Qual è il polinomio di grado zero (costante) che meglio approssima f vicino a x_0.

$$\boxed{T_0(x) = f(x_0)}$$

è l'unico polinomio di grado zero t.c.

$$f(x) = T_0(x) + o(1) \qquad \text{per } x \to x_0$$

Infatti $\quad f(x) - T_0(x) = f(x) - f(x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

Pb 1) Qual è il polinomio di grado ≤ 1 che meglio approssima $f(x)$ vicino a x_0?

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

retta tg. al grafico in $(x_0, f(x_0))$

È il polinomio di grado ≤ 1 che meglio approssima $f(x)$ vicino a x_0 nel senso che

$$f(x) = T_1(x) + o(x-x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

Pb 2) Qual è il polinomio $T_2(x)$ di grado ≤ 2 che meglio approssima $f(x)$ vicino a x_0, nel senso che

$$f(x) = T_2(x) + o\left((x-x_0)^2\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

Cosa significa questo?

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$$

Vediamo come fare. $T_2(x)$ lo scrivo come un generico polinomio scritto in potenze di $x-x_0$

$$T_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x-x_0)^2} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x-x_0) - a_2(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} =$$

($f(x) \to f(x_0)$; $a_0 \to a_0$; $a_1(x-x_0) \to 0$; $a_2(x-x_0)^2 \to 0$)

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \quad \text{solo se} \quad \boxed{a_0 = f(x_0)}$$

$$\overset{?}{=}_{H} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - a_1 - 2a_2(x-x_0)}{2(x-x_0)} = \left(\frac{0}{0}\right) \quad \text{solo se scelgo} \quad \boxed{a_1 = f'(x_0)}$$

($f'(x) \to f'(x_0) - a_1$; $2(x-x_0) \to 0$)

$$\overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - 2a_2}{2} \to f''(x_0) - 2a_2 = 0$$

se e solo se

$$\boxed{a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}}$$

La risposta è: si ha

$$f(x) - T_2(x) = o\left((x-x_0)^2\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

se e solo se

$$\boxed{T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}$$

Polinomio di Taylor di grado/ordine 2 di f centrato in x_0.

Pb 3) Trovare $T_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3$ polinomio di grado ≤ 3 t.c.

$$f(x) = T_3(x) + o\left((x-x_0)^3\right) \quad \text{per } x \to x_0.$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_3(x)}{(x-x_0)^3} = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x-x_0) - a_2(x-x_0)^2 - a_3(x-x_0)^3}{(x-x_0)^3} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

($f(x_0) - a_0$; $(x-x_0)^3 \to 0$)

$$\overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - a_1 - 2a_2(x-x_0) - 3a_3(x-x_0)^2}{3(x-x_0)^2} =$$

($f'(x_0) - a_1$; $3(x-x_0)^2 \to 0$)

se e solo se

$$\boxed{a_0 = f(x_0)}$$

$= \left(\frac{0}{0}\right)$ se e solo se $\boxed{a_1 = f'(x_0)}$

$\overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to x_0} \dfrac{f''(x) - 2a_2 - 6a_3(x-x_0)}{6(x-x_0)} =$ (numeratore $\to f''(x_0) - 2a_2$, denominatore $\to 0$)

$= \left(\frac{0}{0}\right)$ se e solo se $\boxed{a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2}}$

$\overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'''(x) - 6a_3}{6} = 0$ se e solo se $\boxed{a_3 = \dfrac{f'''(x_0)}{6} = \dfrac{f'''(x_0)}{3!}}$

. . .

Pb n) Cerco il polinomio $T_n(x)$ di grado $\leq n$ t.c.

$$f(x) = T_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

Si trova $T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 +$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Def polinomio di Taylor.

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$,

f sia derivabile n volte in x_0, definiamo il polinomio di Taylor di f di ordine n centrato in x_0 in questo modo

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

dove $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$

TEOREMA del resto di Peano.

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a,b)$.
Sia $T_n(x)$ il polinomio di Taylor di ordine n di f centrato in x_0, allora si ha

$$f(x) = T_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x \to x_0 \quad (*)$$

Questo è l'unico polinomio di grado $\leq n$ verificante $(*)$