Studio di funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{|x^3 - x|} = \left|\sqrt[3]{x^3 - x}\right|$$

Dominio: $\mathbb{R}$

Simmetria: è pari $\Rightarrow$ lo studio per $\boxed{x \geq 0}$

Dovrei spezzare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 - x} & \text{se } x^3 - x \geq 0, \text{ cioè } x \geq 1 \vee x = 0 \\ \sqrt[3]{x - x^3} & \text{se } x^3 - x < 0, \text{ cioè } 0 < x < 1 \end{cases}$$

In realtà osserviamo che $f(x) = \sqrt[3]{|x^3 - x|} = \left|\sqrt[3]{x^3 - x}\right|$

Studio $g(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$ e poi ne ribalto il grafico nella zona dove essa è negativa

Studiamo $g(x)$ in $[0, +\infty)$

$g(x) = 0 \iff x = 0 \vee x = 1$

$g(x) > 0 \iff x > 1$

$g(x) < 0 \iff 0 < x < 1$.

Continuità e limiti significativi g è continua.

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Eventuale asintoto obliquo.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = 1$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left(\underbrace{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} - 1}_{2}\right) =$$

$$-\frac{1}{3x^2}$$

$(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t$ per $t \to 0$

$t = -\frac{1}{x^2} \to 0 \quad \alpha = \frac{1}{3}$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left(-\frac{1}{3x^2}\right) = 0$$

$y = x$ asint. obl. per $x \to +\infty$

Derivata prima: g è sicuramente derivabile per $x \neq 0, 1$

$$g'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - x)^{-2/3}(3x^2 - 1) \qquad \text{per } x \neq 0, 1$$

$$= \frac{3x^2 - 1}{3(x^3 - x)^{2/3}}$$

Derivabilità in $x = 1$.

$$g'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} g'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{3x^2 - 1}{3(x^3 - x)^{2/3}} = +\infty$$

($3x^2 - 1 \to 2$, $3(x^3 - x)^{2/3} \to 0^+$)

$$g'_-(1) = +\infty$$

pto a tg. verticale.

Derivabilità in $x = 0$

$$g'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} g'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x^2 - 1}{3(x^3 - x)^{2/3}} = -\infty$$

($3x^2 - 1 \to -1$, $3(x^3 - x)^{2/3} \to 0^+$)

Pto a tg. verticale.

$$g'(x) = \frac{3x^2 - 1}{3(x^3 - x)^{2/3}} \qquad \text{per} \quad x \neq 0, 1.$$

$$g'(x) = 0 \iff x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

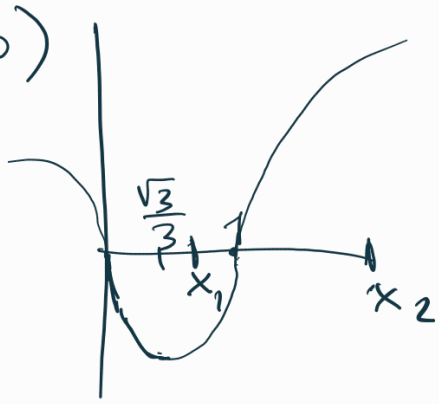
$$g(x) > 0 \iff x > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$< 0 \iff 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

g strett. crescente in $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$ e in $[1, +\infty)$

che implica

strett. crescente in $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

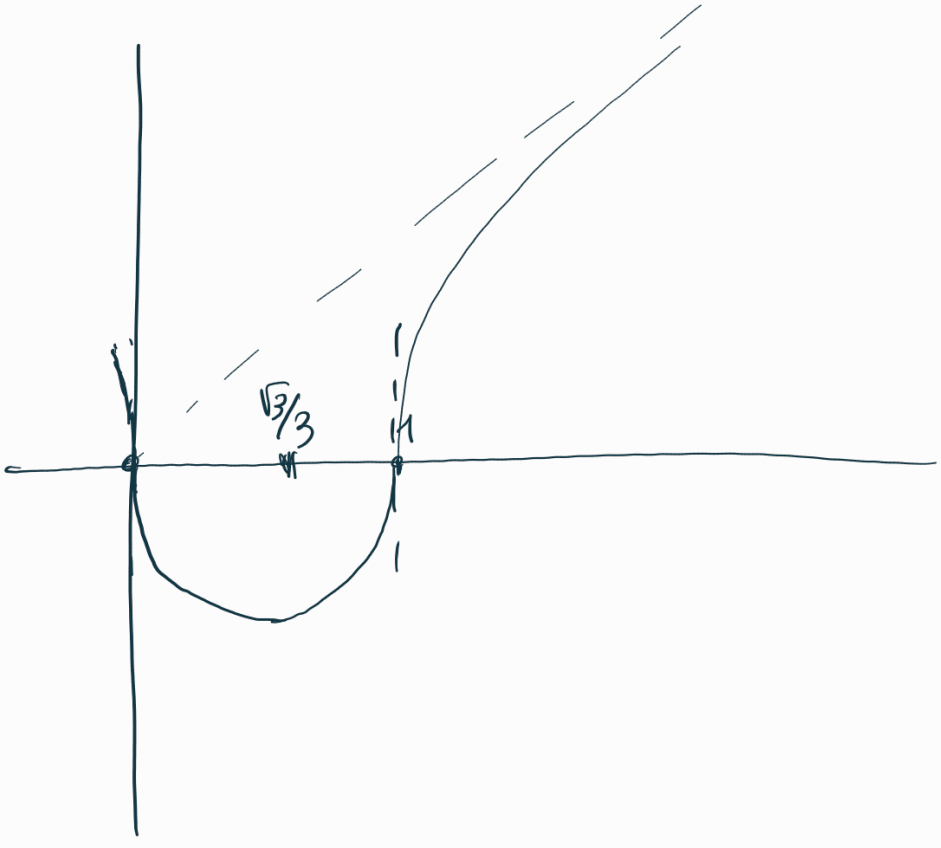


g strett. decresc. in $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ pto di min assoluto di g in $[0, +\infty)$

$x = 0$ pto di max. locale di g in $[0, +\infty)$

(ma non se considero il dominio di g



$$\left[\begin{array}{l} g \text{ continua in } I \\ g' \geq 0 \text{ nei pti interni di } I \end{array} \;\middle|\; \Longrightarrow g \text{ strett. crescente in } I\right]$$

Derivata seconda $(x \neq 0,\ x \neq 1)$

$$g''(x) = \left(\frac{1}{3}(x^3-x)^{-2/3}\ (3x^2-1)\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{2}{3}(x^3-x)^{-5/3}(3x^2-1)^2 + (x^3-x)^{-\frac{2}{3}}\,6x\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(x^3-x)^{-5/3}\left[-(3x^2-1)^2 + 9x(x^3-x)\right]$$

$$= \frac{2}{9}(x^3-x)^{-5/3}\left[-9x^4 + 6x^2 - 1 + 9x^4 - 9x^2\right] =$$

$$= \frac{2}{9}(x^3-x)^{-5/3}(-3x^2-1) = -\frac{2}{9}(x^3-x)^{-5/3}(3x^2+1) =$$

$$= -\frac{2}{9}\frac{(3x^2+1)}{(x^3-x)^{5/3}}$$

$g''(x) = 0$ mai.

$g''(x) \geq 0 \iff x^3 - x \leq 0 \overset{x>0}{\iff} x^2 - 1 \leq 0 \iff 0 < x \leq 1$

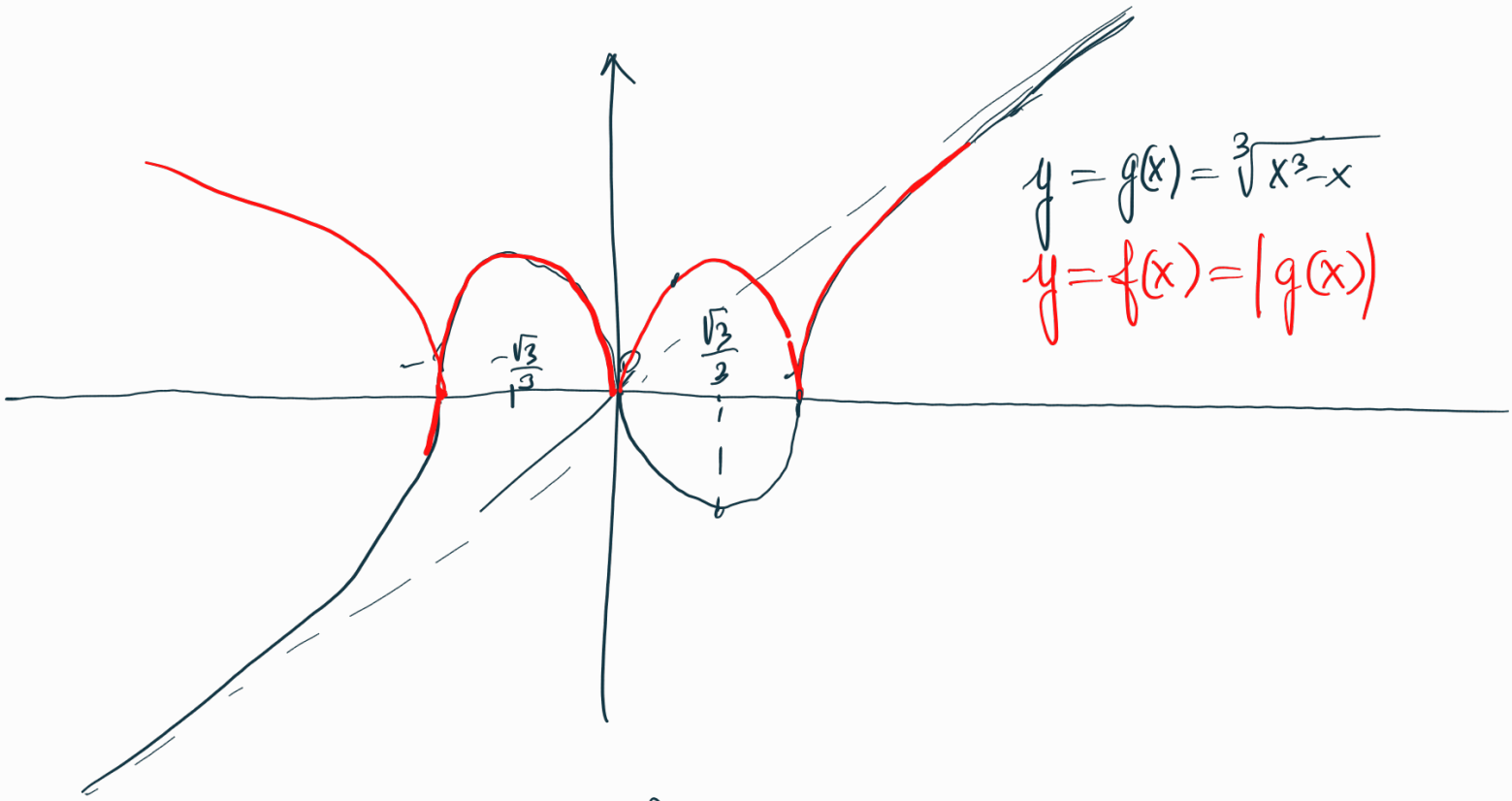
$g''(x) < 0 \iff x > 1.$

g strett. convessa in $[0,1]$

g strett. concava in $[1,+\infty)$

$x=1$ è un flesso a tg verticale

Anche $x=0$ è un flesso se considero la g definita anche per $x<0$



Cosa posso dire per la f?

Dominio: $\mathbb{R}$, continua in $\mathbb{R}$,

Segno: $f' > 0$ $\forall x$ eccetto $\{0, \pm 1\}$ dove si annulla.

f pari $\Rightarrow$ basta descriverla per $x \geq 0$.

f strett. crescente in $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ e in $[1, +\infty)$

f strett. decrescente in $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$. | $y = x$ è asintoto per $x \to +\infty$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ pto di max rel.

$x = 0, 1$ pti di min assoluto e sono pti di cuspide

f è strettamente concava in $[0,1]$ e in $[1, +\infty]$
(ma non nella loro unione).

TEOREMA di De L'Hôpital.

(Serve per risolvere f.i. del tipo $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$)

Siano f, g derivabili in (a,b), dove $-\infty \le a < b \le +\infty$

Supponiamo che:

1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ (oppure $\pm\infty$)
   (a^+: b^-)

2) $g'(x) \neq 0$ def^{ta} per $x \to a^+$ (b^-)

3) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}^*$
   (b^-)

Allora $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.
(b^-)

Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$ di $f(x) = 3\operatorname{tg} x - 3x - x^2$

Significa trovare $\alpha > 0$ t.c.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

se il limite successivo esiste

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3\operatorname{tg} x - 3x - x^2}{x^\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{Hôp}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{3(1+\operatorname{tg}^2 x) - 3 - 2x}{\alpha x^{\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{3\operatorname{tg}^2 x - 2x}{\alpha x^{\alpha-1}}}_{\to 0} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{6\operatorname{tg} x (1+\operatorname{tg}^2 x) - 2}{\underbrace{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}_{2 \cdot 1}} = -1$$

$\to -2$

$\to 0$ se $\alpha \ge 1$

se $\alpha = 2$

Stessa cosa per $f(x) = 3\operatorname{tg} x - 3x - x^3$

$\alpha > 1$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\operatorname{tg} x - 3x - x^3}{x^\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{3 + 3\operatorname{tg}^2 x - 3 - 3x^2}{\alpha x^{\alpha-1}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$\alpha > 2$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{3\left(2\operatorname{tg} x(\operatorname{tg}^2 x + 1) - 2x\right)}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{6\left(\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - x\right)}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{6\left(3\operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x) + 1 + \operatorname{tg}^2 x - 1\right)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}} =$$

x^2 $\qquad$ $\to 4$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{6\operatorname{tg}^2 x\left(3 + 3\operatorname{tg}^2 x + 1\right)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{24x^2}{5\cdot 4\cdot 3\, x^2} =$$

$\alpha = 5$

$$= \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

$\Rightarrow f(x) \sim \frac{2}{5}x^5$ $\qquad$ $\inf^{mo}$ di ordine 5.

Il teorema di De L'Hôpital può essere usato per ricontrollare limiti già noti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

OSS 1 Non sempre l'Hôpital è il metodo più semplice

Esempio:

$\sim (\sqrt{x})^4 = x^2$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^4(\sqrt{x})}{\log(1+3x)\sqrt{\arctg(x^2)}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$\log(1+3x) \sim 3x$ $\quad$ $\sqrt{\arctg(x^2)} \sim \sqrt{x^2} = x$

non uso l'Hopital perché le derivate sono complicate

$$= \frac{1}{3}$$

Prima di usare l'Hôpital

OSS 2 Controllare che sia una f.i. $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2+x}{3+x} \overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1} = 1$$

$$\| \quad \frac{2}{3}$$

OSS 3 Se non esiste $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, non vuol dire che non esista $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1} =$$

NO, perché l'ultimo limite non esiste!

$$= \lim_{x\to+\infty} (1+\cos x) \not\exists$$

$$\| \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1 \qquad \left(\frac{\sin x}{x} \to 0\right)$$

OSS 4 Il teorema dell'Hôpital dice che, sotto opportune ipotesi,

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ma non dice che $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ per $x \to +\infty$

Esempio

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

ma non è vero che $\frac{e^x}{x} \sim e^x$ per $x \to +\infty$

Applicazione dell'Hôpital al calcolo degli asintoti obliqui

PROP f derivabile in $(a, +\infty)$, supponiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Se $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R}^*$, allora $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

Dim

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{1} = m \qquad \square$$

Anche in questo caso se $\nexists \lim_{x \to +\infty} f'(x)$, non è detto che non esista $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, e quindi che non esista asintoto obliquo.

Esempio

$f(x) = x + \frac{\sin(x^2)}{x}$ ammette asint obliquo $y = x$ per $x \to +\infty$

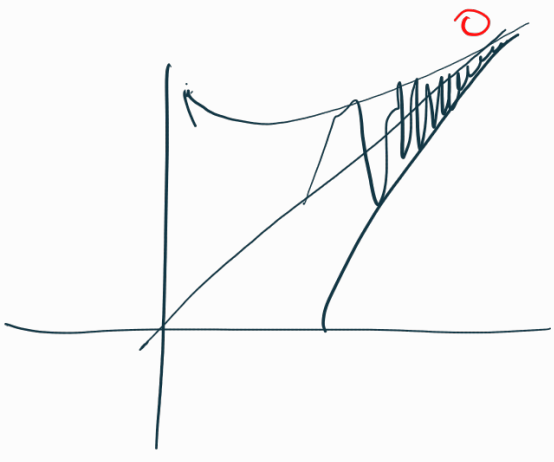
$\frac{\sin(x^2)}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\cos x^2 \cdot 2x^2 - \sin(x^2)}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(1 + 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}\right)$$ non ha limite.

$2\cos(x^2)$ non ha limite

$\frac{\sin(x^2)}{x^2} \to 0$



Altra applicazione: studio dei pti di non derivabilità (teorema già usato tante volte)

TEOR Sia f continua in $[x_0, b)$, derivabile in (x_0, b)

Se $\exists \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$, allora

$$f'_+(x_0) = \ell$$

Dim

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{(?)}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{1} = l$$

($f(x) - f(x_0) \to 0$ perché f continua in x_0; $x - x_0 \to 0$)

Dim. De L'Hôpital nel caso $\left(\frac{0}{0}\right)$ per $x \to a^+$, $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$$

Se pongo $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}$

$\tilde{f}$ è continua in a.

Analogamente, ponendo $\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x > a \\ 0 & \text{se } x = a. \end{cases}$

$\tilde{g}$ è continua in a.

Fissiamo $x \in (a,b)$ e usiamo il teor. di Cauchy nell'intervallo $[a,x]$ alle funzioni $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$.

Teor. di Cauchy. $\tilde{f}, \tilde{g}$ continue in $[a,x]$ derivabili in (a,x). $\Rightarrow \exists c \in (a,x)$ t.c.

$$\boxed{\tilde{f}'(c)\left(\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)\right) = \tilde{g}'(c)\left[\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)\right]} \quad (*)$$

OSS ovviamente $c = c(x)$

Nelle ipotesi dell'Hôpital, $\tilde{g}'(c) = g'(c) \neq 0$ se c è abbastanza vicino ad a, cioè se x è abbastanza vicino ad a.

Da (*) otteniamo

$$\frac{\tilde{f}'(c)}{\tilde{g}'(c)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)}$$

↑ se fosse nulla, per Rolle esisterebbe un punto in cui la derivata si annulla.

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} \overset{\text{Cauchy}}{=}$$

$$= \lim_{x \to a^+} \frac{\tilde{f}'(c)}{\tilde{g}'(c)} = \quad \text{dove} \quad c = c(x) \in (a, x)$$

$a < c(x) < x$

se $x \to a^+$

$c(x) \to a^+$

$$= \lim_{x \to a^+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} =$$

$c(x) = y \to a^+$

$$= \lim_{y \to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \ell$$

□