Funzioni iperboliche

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \; ; \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

dominio: $\mathbb{R}$. Sono continue, anzi derivabili quante volte si vuole (classe C^∞)

Segno $\cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\sinh x > 0$ per $x > 0$

< 0 $x < 0$

$= 0$ $x = 0$

Simmetrie

$\sinh$ è dispari

$\cosh$ è pari.

Limiti $\lim_{x \to \pm\infty} \cosh x = +\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} \sinh x = \pm\infty$

$\sinh x \sim \frac{e^x}{2}$ per $x \to +\infty$

$\cosh x \sim \frac{e^x}{2}$ "

$\sinh 0 = 0 \qquad \cosh 0 = 1$

Derivata $(\sinh x)' = \cosh x > 0 \Rightarrow \sinh x$ strett. crescente in $\mathbb{R}$

$(\cosh x)' = \sinh x > 0$ se $x > 0$

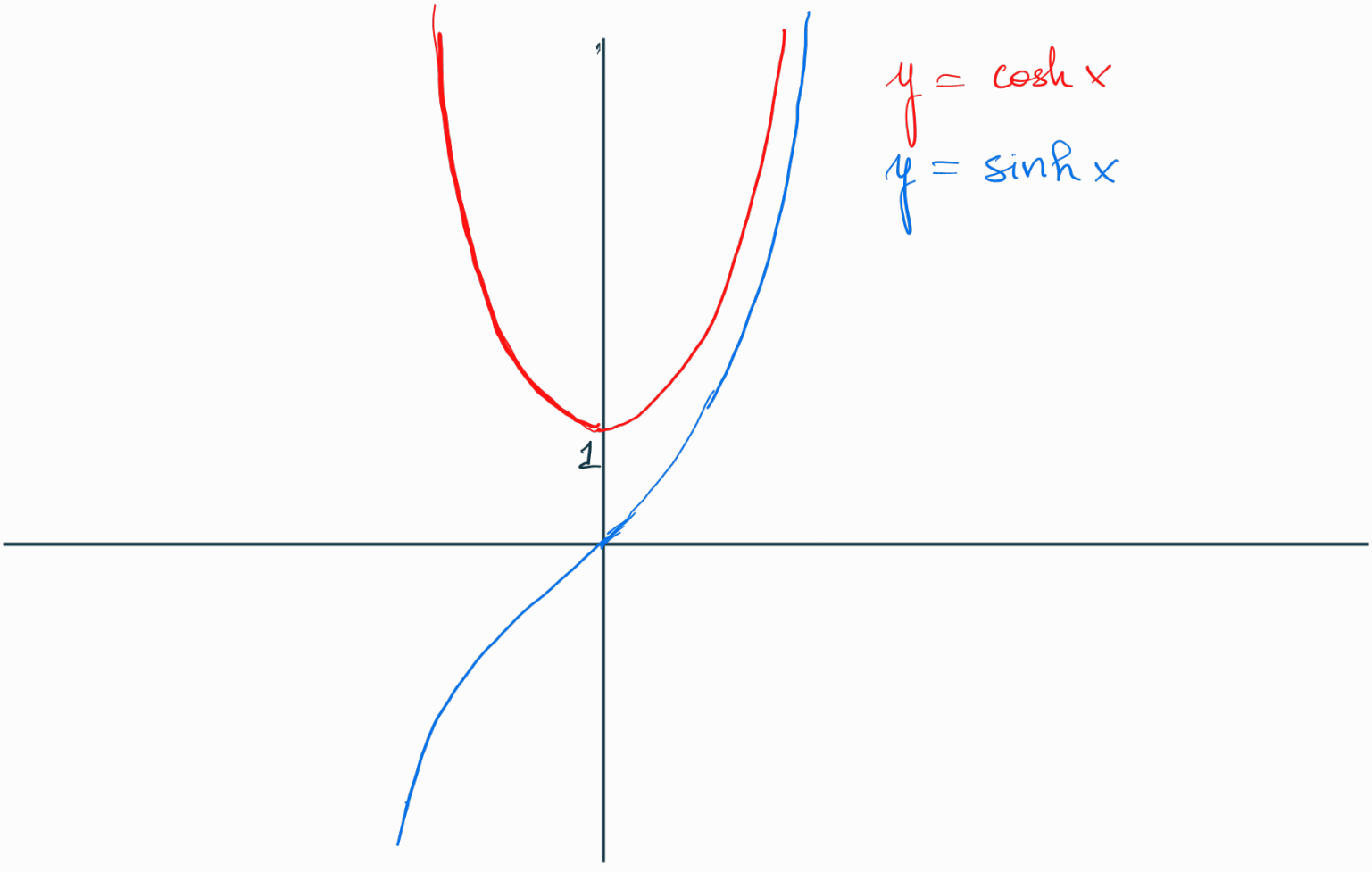
$= 0$ $x = 0$

< 0 se $x < 0$

$\cosh x$ è strett. crescente in $[0, +\infty)$

strett. decrescente in $(-\infty, 0]$

$x = 0$ è pto di min. assoluto.



Derivata seconda

$$(\cosh x)'' = \cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \cosh x$ è strettam. convessa in $\mathbb{R}$

$$(\sinh x)'' = \sinh x \gtreqless 0 \qquad x \gtreqless 0$$

$\sinh x$ è strett. convessa in $[0, +\infty)$

strett. concava in $(-\infty, 0]$

$x = 0$ è pto di flesso.

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$$

Verifica $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} e^{-x} \cdot \frac{(e^{2x}-1)}{2x} =$

$e^{-x} \to 1$, $\frac{(e^{2x}-1)}{2x} \to 1$

$= 1$

$$\sinh x \sim x \quad \text{per } x \to 0$$
$$\sinh x = x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}(e^{2x} + 1 - 2e^x)}{2x^2} =$$

$e^{-x} \to 1$, $e^{2x} + 1 - 2e^x = (e^x - 1)^2$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2 \to 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

ricorda il limite notevole del cos. trigonometrico

$$\cosh x - 1 \sim \frac{x^2}{2} \quad \text{per } x \to 0$$
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

Vale un'identità fondamentale per le funzioni iperboliche

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

verifica:

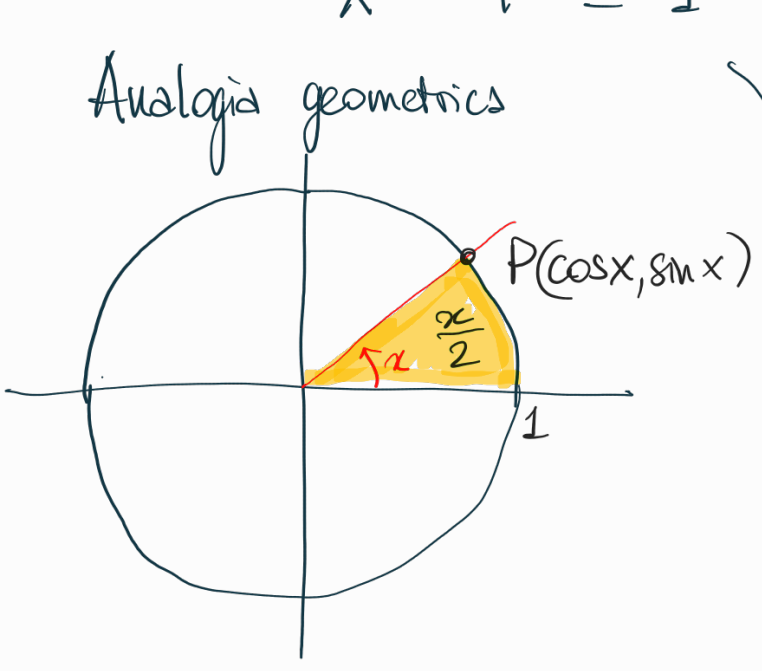
$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1$$

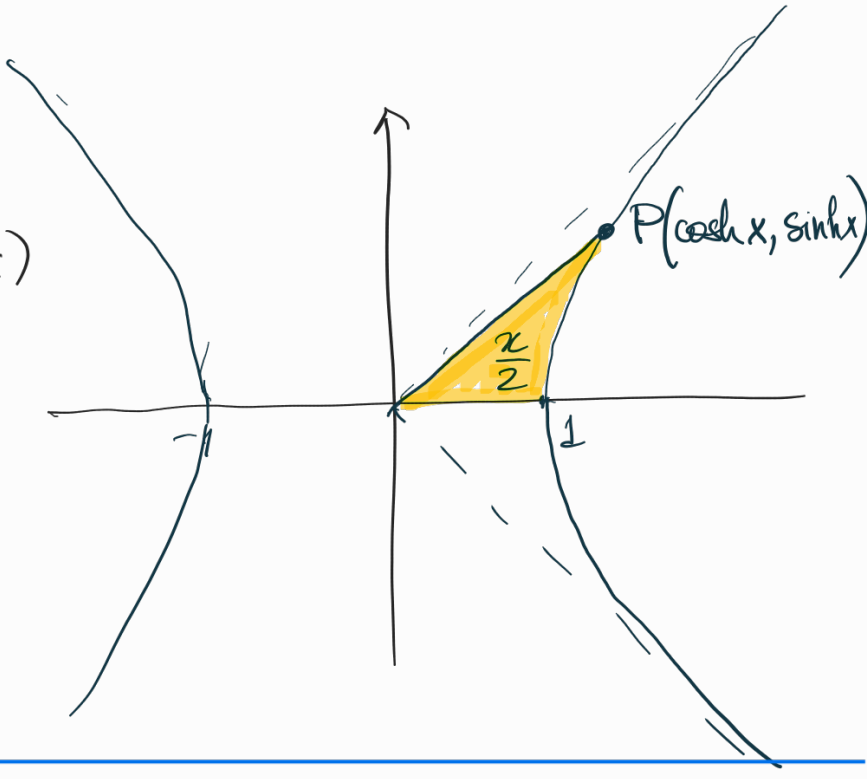
$$e^{2x} + e^{-2x} + 2 - \left(e^{2x} + e^{-2x} - 2\right) = 4 \qquad \text{ok!}$$

Quindi $\cosh x$ e $\sinh x$ sono le coordinate di un punto che si muove su un ramo di una iperbole

$$X^2 - Y^2 = 1$$

Analogia geometrica





Funzioni iperboliche inverse

$\sinh x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biettiva.

$\exists\, f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f^{-1}(y) = \text{settsinh } y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \longmapsto f^{-1}(y) =$ l'unico $x \in \mathbb{R}$ t.c. $\sinh x = y$.

Scriviamola esplicitamente. Fissato $y \in \mathbb{R}$, cerco x t.c.

$$\sinh x = y \iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$

$$\iff e^{2x} - 1 = 2y e^x$$

$$\iff e^{2x} - 2y e^x - 1 = 0 \quad \text{eq}^{\text{ne}} \text{ di } 2^\circ \text{ grado in } e^x$$

$$\iff e^x = y \pm \sqrt{y^2+1} \quad \text{scelgo il più perché sia} > 0$$

$$\iff x = \boxed{\log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = \text{settsinh } y}$$

Calcoliamone la derivata.

1) calcolo diretto

$$D(\text{settsinh } x) = D\left(\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{D(\text{settsinh } x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

2° modo: derivata della f. inversa

$$(\text{settsh } y)' = \frac{1}{(\sinh x)'} = \frac{1}{\cosh x} =$$

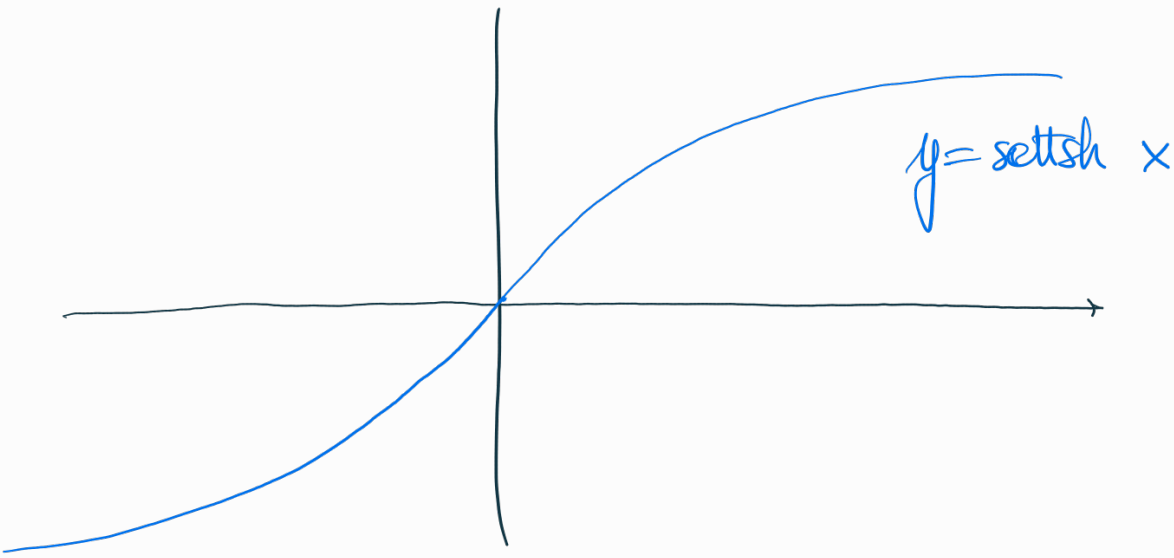
dove $\sinh x = y$

$x = \text{settsh } y$

OSS dall'identità fondam. $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$

$\cosh x = \pm \sqrt{1+\sinh^2 x}$, scelgo il + perché $\cosh x > 0$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$



$\cosh\big|_{[0,+\infty)} : [0,+\infty) \longrightarrow [1,+\infty)$ biettiva

La sua inversa è

$\text{settcosh} : [1,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$

$y \longmapsto \text{settcosh } y =$ l'unico $x \in [0,+\infty)$ t.c. $\cosh x = y$.

Risolvo (in x) l'eq^e

$\cosh x = y \in [1,+\infty)$.

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \iff e^{2x} + 1 = 2ye^x$$

$$\iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

$$\iff e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

si sceglie il $+$ perché se scelgo il $-$ viene $e^x < 1$ che è impossibile perché $x \geq 0$

$$\iff x = \log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

$$\boxed{\operatorname{settcosh} y = \log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \quad \forall y \geq 1.}$$

$(\operatorname{settcosh} y)' =$ < calcolo diretto (per esercizio)
con il thm della derivata di f. inversa

$$(\operatorname{settcosh} y)' = \frac{1}{(\cosh x)'} =$$

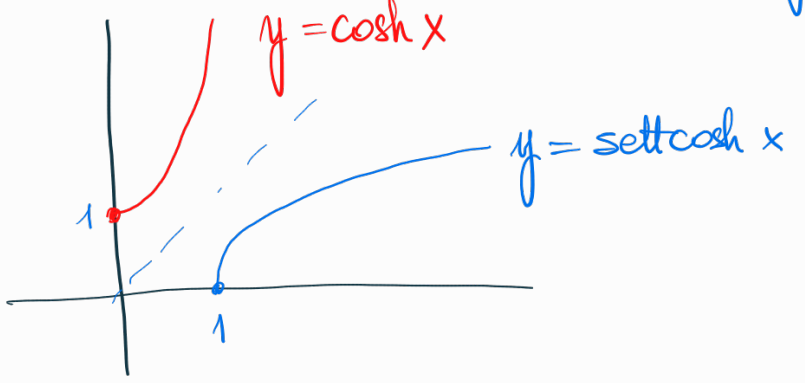
dove $\cosh x = y$, $x = \operatorname{settcosh} y$

$$= \frac{1}{\sinh x} =$$

$\sinh x \overset{\text{identità fondam.}}{=} \pm \sqrt{\cosh^2 x - 1}$

scelgo il $+$ perché $x \in [0, +\infty) \Rightarrow \sinh x \geq 0$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad \forall y > 1.$$



$$(\operatorname{settcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \forall x > 1.$$

Per $x = 1$?

$$\operatorname{settcosh}' 1 = \lim_{y \to 1^+} \operatorname{settcosh}' y = \lim_{y \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} = +\infty$$

Esercizio per casa.

Studiare la funzione

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

osservare che è invertibile.

Trovare l'espressione esplicita e la derivata della f. inversa

$$\operatorname{sett\,tgh}\, y$$

Studio di funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{|x^3 - x|}$$

Dominio: $\mathbb{R}$

Simmetria: è pari $\Rightarrow$ la studio per $\boxed{x \geq 0}$

Dovrei spezzare il valore assoluto.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 - x} & \text{se } x^3 - x \geq 0, \text{ cioè } x \geq 1 \ \cancel{\vee\ x = 0} \\ \sqrt[3]{x - x^3} & \text{se } x^3 - x < 0, \text{ cioè } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

In realtà osserviamo che $f(x) = \sqrt[3]{|x^3 - x|} = \left|\sqrt[3]{x^3 - x}\right|$

Studio $g(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$ e poi ne ribalto il grafico nella zona dove essa è negativa

Studiamo $g(x)$ in $[0, +\infty)$

$g(x) = 0 \iff x = 0 \vee x = 1$

$g(x) > 0 \iff x > 1$

$g(x) < 0 \iff 0 < x < 1$.

Continuità e limiti significativi g è continua.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

Eventuale asintoto obliquo.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = 1$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left(\underbrace{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} - 1}_{2}\right) =$$

$$-\frac{1}{3x^2}$$

$(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t$ per $t \to 0$

$t = -\frac{1}{x^2} \to 0 \quad \alpha = \frac{1}{3}$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left(-\frac{1}{3x^2}\right) = 0$$

$y = x$ asint. obl. per $x \to +\infty$

Derivata prima g è sicuramente derivabile per $x \neq 0, 1$

$$g'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - x)^{-2/3}(3x^2 - 1) \qquad \text{per } x \neq 0, 1$$

$$= \frac{3x^2 - 1}{3(x^3 - x)^{2/3}}$$

Derivabilità in $x = 1$.

$$g'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} g'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{3x^2 - 1}{3(x^3 - x)^{2/3}} = +\infty$$

($3x^2 - 1 \to 2$, $3(x^3 - x)^{2/3} \to 0^+$)

$$g'_-(1) = +\infty$$

pto a tg. verticale.

Derivabilità in $x = 0$

$$g'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} g'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x^2 - 1}{3(x^3 - x)^{2/3}} = -\infty$$

($3x^2 - 1 \to -1$, $3(x^3 - x)^{2/3} \to 0^+$)

Pto a tg. verticale.

$$g'(x) = \frac{3x^2 - 1}{3(x^3 - x)^{2/3}} \qquad \text{per} \quad x \neq 0, 1.$$

$$g'(x) = 0 \iff x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

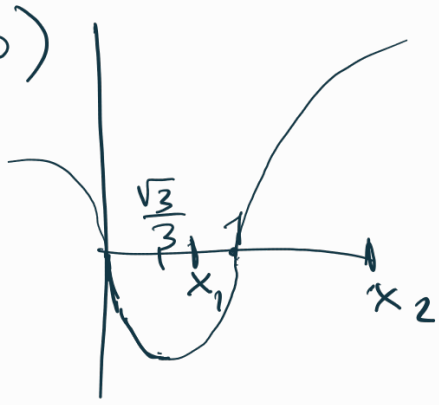
$$g(x) > 0 \iff x > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$< 0 \iff 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

g strett. crescente in $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$ e in $[1, +\infty)$

che implica

strett. crescente in $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

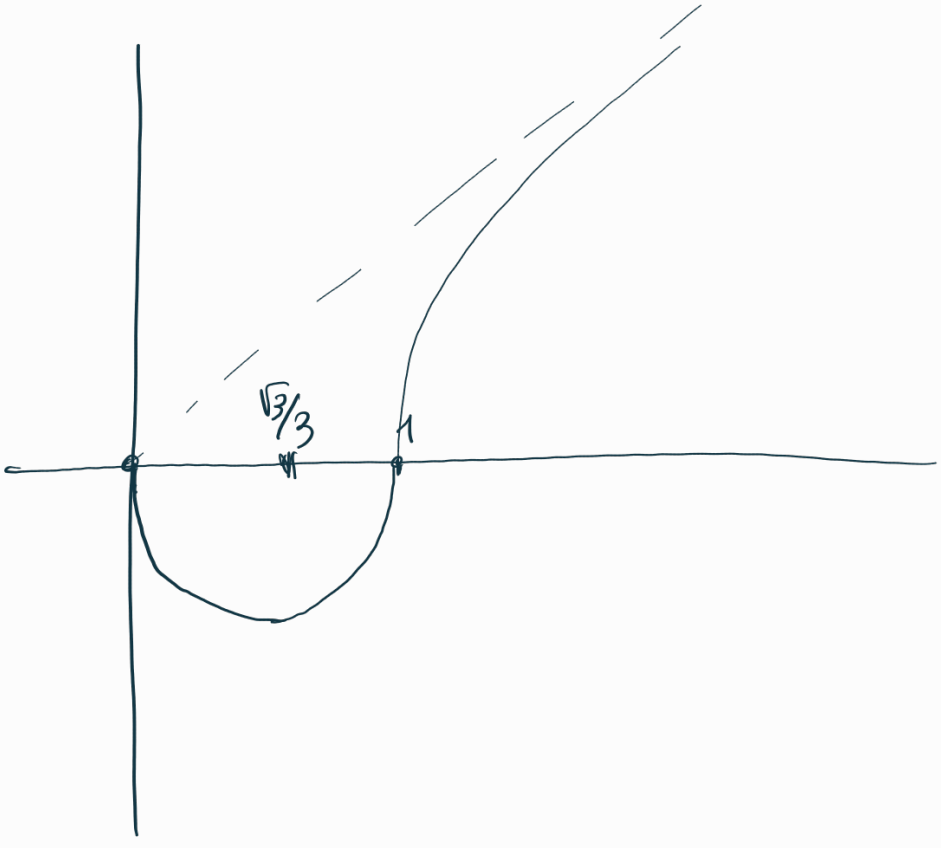


g strett. decresc. in $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ pto di min assoluto di g in $[0, +\infty)$

$x = 0$ pto di max. locale di g in $[0, +\infty)$

(ma non se considero il dominio di g



g continua in I

$g' \geq 0$ nei pti interni di I

$\Longrightarrow$ g strett. crescente in I