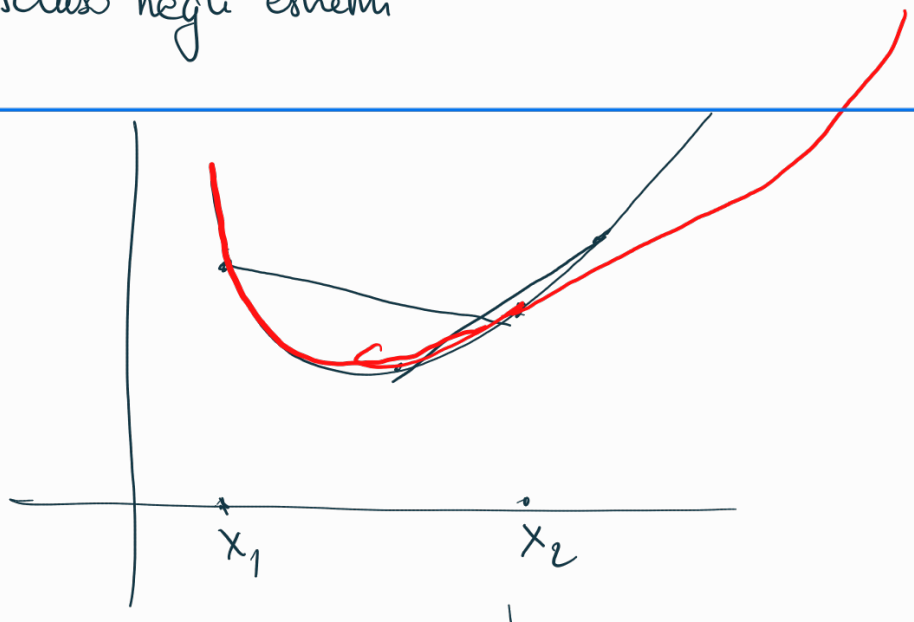
DEF. Geometrica di funzioni convesse/concave

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo.

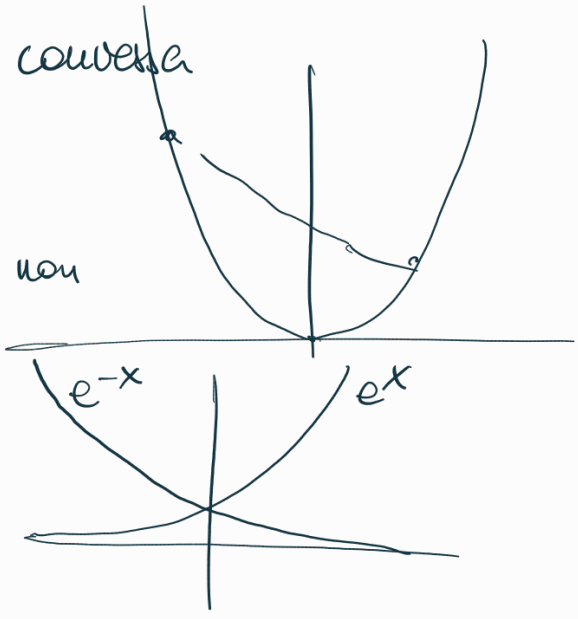
Diremo che f è:

- **convessa** / **concava** in I se, presi comunque due punti distinti $x_1, x_2 \in I$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ non ha punti al di sotto / sopra del grafico di f.

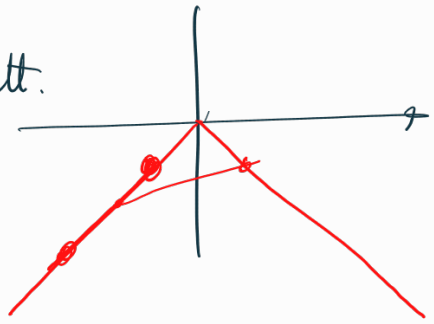
- **strett. convessa** / **concava** in I, se, presi comunque due punti distinti $x_1, x_2 \in I$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))\ (x_2, f(x_2))$ è strettamente al di sopra / sotto del grafico di f (escluso negli estremi)



- $|x|$ è convessa in $\mathbb{R}$, non strettamente convessa
- $f(x) = x^2$ è strett. convessa in $\mathbb{R}$
- una retta $f(x) = mx+q$ è convessa ma non strett.
- e^x è strett. convessa in $\mathbb{R}$.



- $f(x) = -|x|$ è concava, non strett.

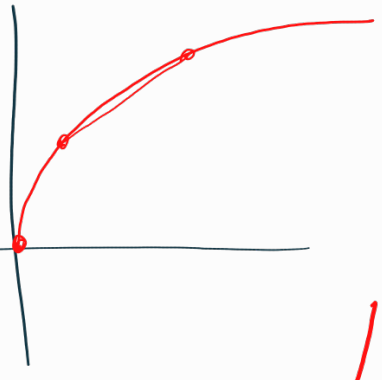


- $f(x) = \sqrt{x}$ è strett. concava in $[0, +\infty)$

- $f(x) = mx+q$

è sia concava che convessa

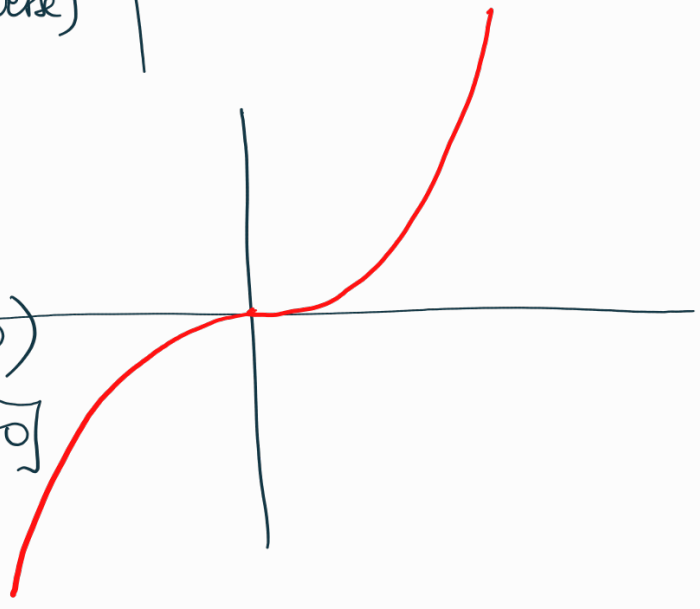
(anzi, le rette sono le uniche funzioni concave e convesse)



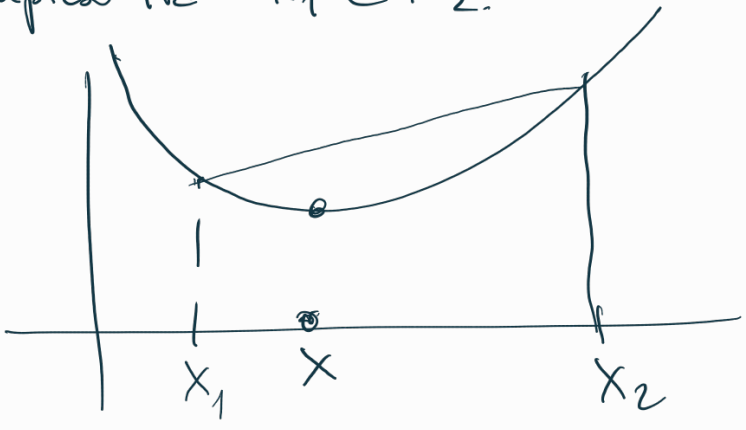
- $f(x) = x^3$

è strettam. convessa in $[0, +\infty)$

e strettam. convessa in $(-\infty, 0]$



<u>OSS</u> Fissati due pti $x_1, x_2 \in I$, per es. $x_1 < x_2$, sia x un pto compreso tra x_1 e x_2.



Eq^ne della retta passante per $(x_1, f(x_1))$ $(x_2, f(x_2))$

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

f è convessa significa:

$$\forall x_1<x_2,\ x_1,x_2\in I \quad \forall x\in(x_1,x_2) \quad f(x)\le f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) \tag{*}$$

Un generico $x\in(x_1,x_2)$ si può scrivere come

$$x = x_1 + t(x_2-x_1) = \qquad t\in(0,1)$$

$$= (1-t)x_1 + t x_2.$$

Se sostituiamo questa espressione di x in $(*)$ otteniamo

$$f\big((1-t)x_1+tx_2\big)\le (1-t)f(x_1)+t f(x_2)$$

Quindi

DEF. analitica di f. convessa/concava

- f si dice convessa in I se $\forall x_1,x_2\in I\ (x_1<x_2)$ $\forall t\in(0,1)$ (concava)

$$f\big((1-t)x_1+tx_2\big) \le (1-t)f(x_1)+t f(x_2)$$

$\ge$

strett. convessa se (concava)

$$f\big((1-t)x_1+tx_2\big) \le (1-t)f(x_1)+t f(x_2)$$

$>$

$\forall x_1<x_2$
$\forall t\in(0,1)$

Proviamo, usando questa def^{ne} che

$f(x)=x^2$ è strett. convessa in $\mathbb{R}$.

Fisso $x_1<x_2$, $t\in(0,1)$, devo provare che

$$\big((1-t)x_1+tx_2\big)^2 < (1-t)\,x_1^2 + t\,x_2^2$$

$$(1-t)^2x_1^2 + 2t(1-t)x_1x_2 + t^2x_2^2 \leq (1-t)\,x_1^2 + t\,x_2^2$$

$$\big[(1-t)^2-(1-t)\big]x_1^2 + 2t(1-t)x_1x_2 + \underbrace{(t^2-t)}_{t(t-1)}\,x_2^2 \leq 0$$

divido per $1-t>0$

$$(t-1)\,x_1^2 + 2t\,x_1x_2 - t\,x_2^2 < 0$$

$$t\,x_1^2 - 2t\,x_1x_2 + t\,x_2^2 \overset{?}{>} 0$$

divido per $t>0$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \overset{?}{>} 0$$

$$(x_1-x_2)^2 > 0 \qquad \text{ok!}$$

Questa def$^{\text{ne}}$, come si vede, non è facilissima da verificare. Quindi abbiamo bisogno di altri criteri.

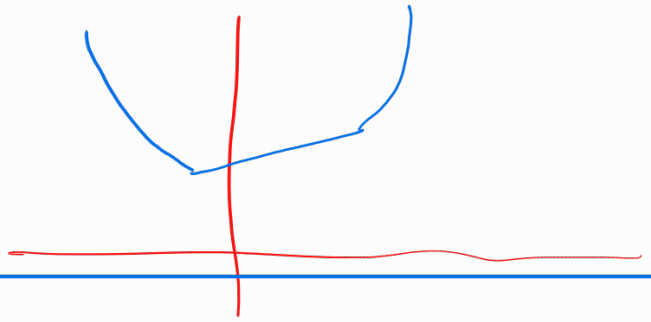
OSS f è (strett.) convessa $\iff -f$ è (strett.) concava.

TEOREMA (regolarità delle f. convesse)

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ convessa (concava) in (a,b). Allora

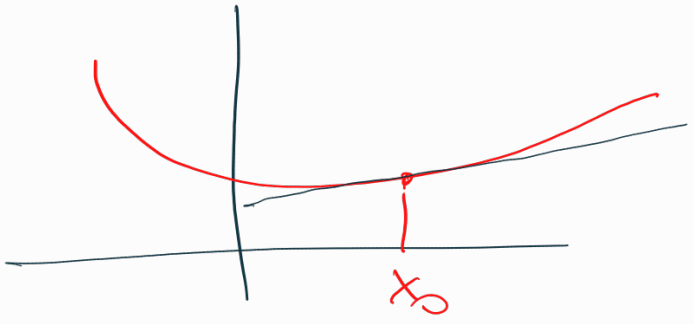
1) f è continua in (a,b);

2) $\forall x\in(a,b)$ esistono finite $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, e si ha $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ ($\geq$)



PROP Sia f convessa (concava) in I intervallo aperto.
Sia x_0 un punto in cui f è derivabile

Allora
il grafico di f si trova
"non al di sotto" (sopra) della retta tg.
al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$



In formule, si ha

$$f(x) \underset{\leq}{\geq} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \forall x \in I$$

se f strett. convessa vale il $>$ per $x \neq x_0$
strett concava " " $<$ " " "

TEOREMA Sia f continua in I intervallo, derivabile due volte nei pti interni. Allora

1) f convessa in $I \iff f'$ crescente in $I \iff f''(x) \geq 0$ $\forall x$ interno a I
concava decrescente $\leq$

2) f strett. convessa in $I \iff f'$ strett. crescente in $I \impliedby f''(x) > 0$ $\forall x$ interno
concava decresc < 0

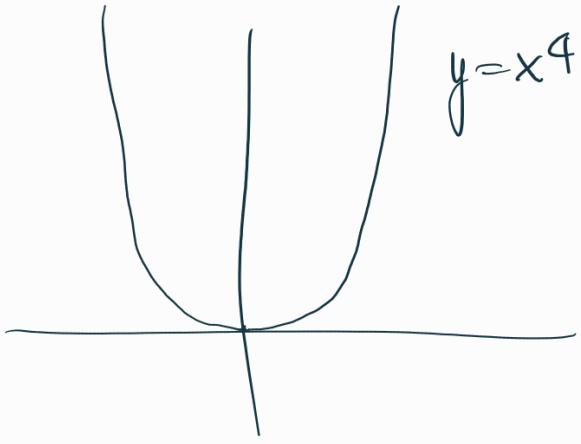
Proviamo (ora) che $f(x) = x^2$ è strett. convessa in $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Oss La freccia "$\Leftarrow$" in 2) non si può invertire

$f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$ strett. crescente $\Rightarrow$ f strett. convessa

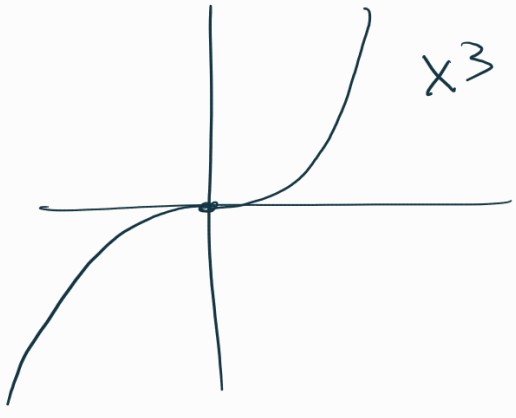
$f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$



$f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = 3x^2$, $\quad f''(x) = 6x \gtrless 0 \iff x \gtrless 0$

$f''(x) > 0$ in $(0, +\infty) \Rightarrow f(x)$ strett. convessa in $[0, +\infty)$

< 0 in $(-\infty, 0) \Rightarrow f(x)$ " concava in $(-\infty, 0]$



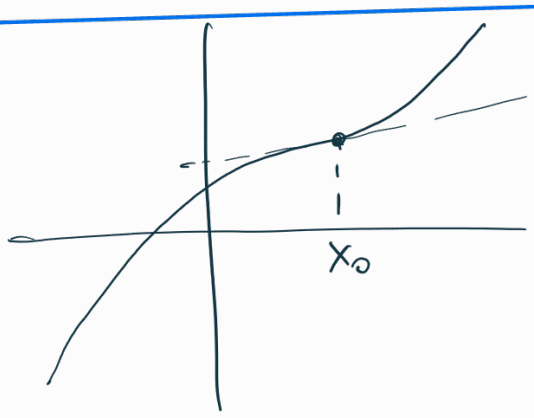
Def flesso Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ si dice pto di flesso (o flesso) se:

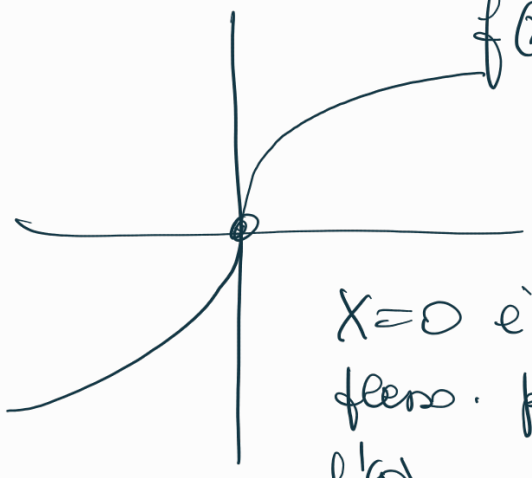
1) $\exists$ la tg. al grafico di f in x_0, anche verticale

cioè $\quad \exists\, f'(x_0) \in \mathbb{R}^*$

2) $\exists$ un intorno destro di x_0 in cui f è convessa,
e un " sinistro di x_0 " " f è concava,

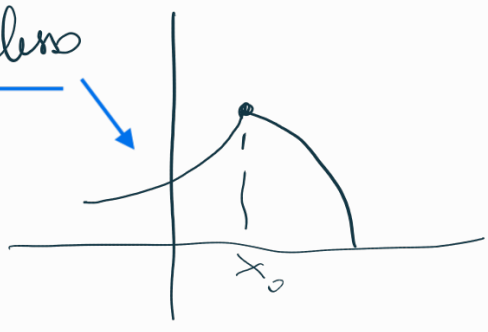
o viceversa





$x=0$ è un f. flesso. perché $f'(0)=+\infty$

Questo non è un flesso



$f(x) = x^{1/3}$, $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$ $\quad f'(0) = +\infty$ (non è derivabile)

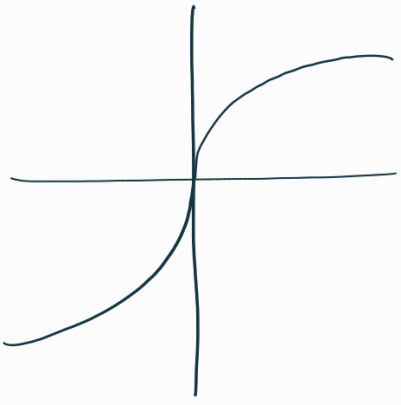
$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3}$ $\quad \begin{cases} < 0 & \text{se } x > 0 \\ > 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$\nexists$ in $x=0$

f strett. convessa in $(-\infty, 0]$

strett. concava in $[0, +\infty)$

$x=0$ è pto di flesso (a tg. verticale)

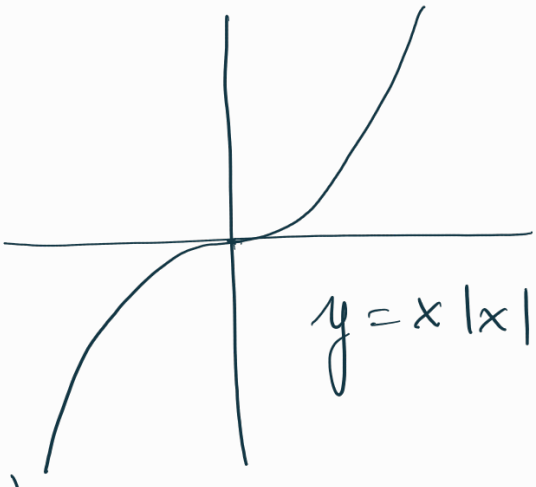


Quindi: in un punto di flesso può non esistere f''.

$f(x) = x|x|$ $\quad f'(x) = 2|x|$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(0) = 0$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x > 0 \\ \nexists & \text{se } x = 0 \\ -2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



f strett. convessa in $[0, +\infty)$

" concava in $(-\infty, 0]$

$x = 0$ flesso ma non esiste $f''(0)$

TEOREMA $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a,b) e derivabile due volte in $x_0 \in (a,b)$.

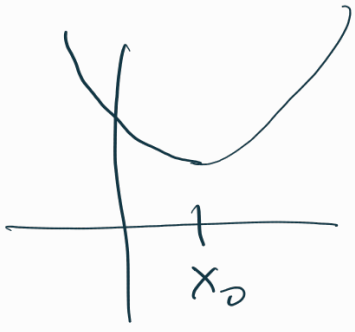
Se x_0 è un punto di flesso, allora $f''(x_0) = 0$

Dim Supponiamo che

f sia concava in un intorno sinistro di x_0

f " convessa " " " destro di x_0

f concava	x_0	f convessa
f' decresc.		f' cresc.



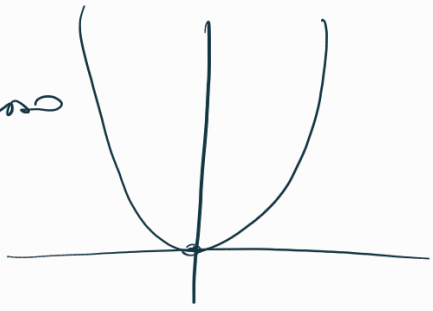
$\Rightarrow x_0$ è un pto di minimo locale di f'

Per il teorema di Fermat $f''(x_0) = 0$. $\square$

Tuttavia ci possono essere $x_0 \in (a,b)$ in cui $f''(x_0)=0$ ma questo non è un flesso, per es

$f(x)=x^4 \Rightarrow f'(x)=4x^3, \quad f''(x)=12x^2.$

$f''(0)=0$ ma non è un flesso



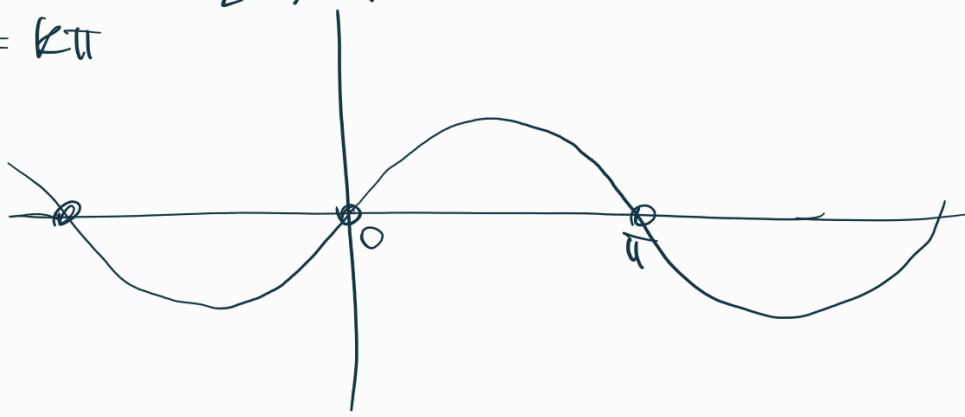
$f(x)=\sin x, \quad f'(x)=\cos x, \quad f''(x)=-\sin x$

$$f''(x) \begin{cases} <0 & \text{in } (0,\pi) \ +2k\pi \\ =0 & \text{in } k\pi \\ >0 & \text{in } (-\pi,0) \ +2k\pi \end{cases}$$

$\sin x$ è strett. concava in $[0,\pi] \ +2k\pi$

strett. convessa in $[-\pi,0] \ +2k\pi$

ha flessi per $x=k\pi$



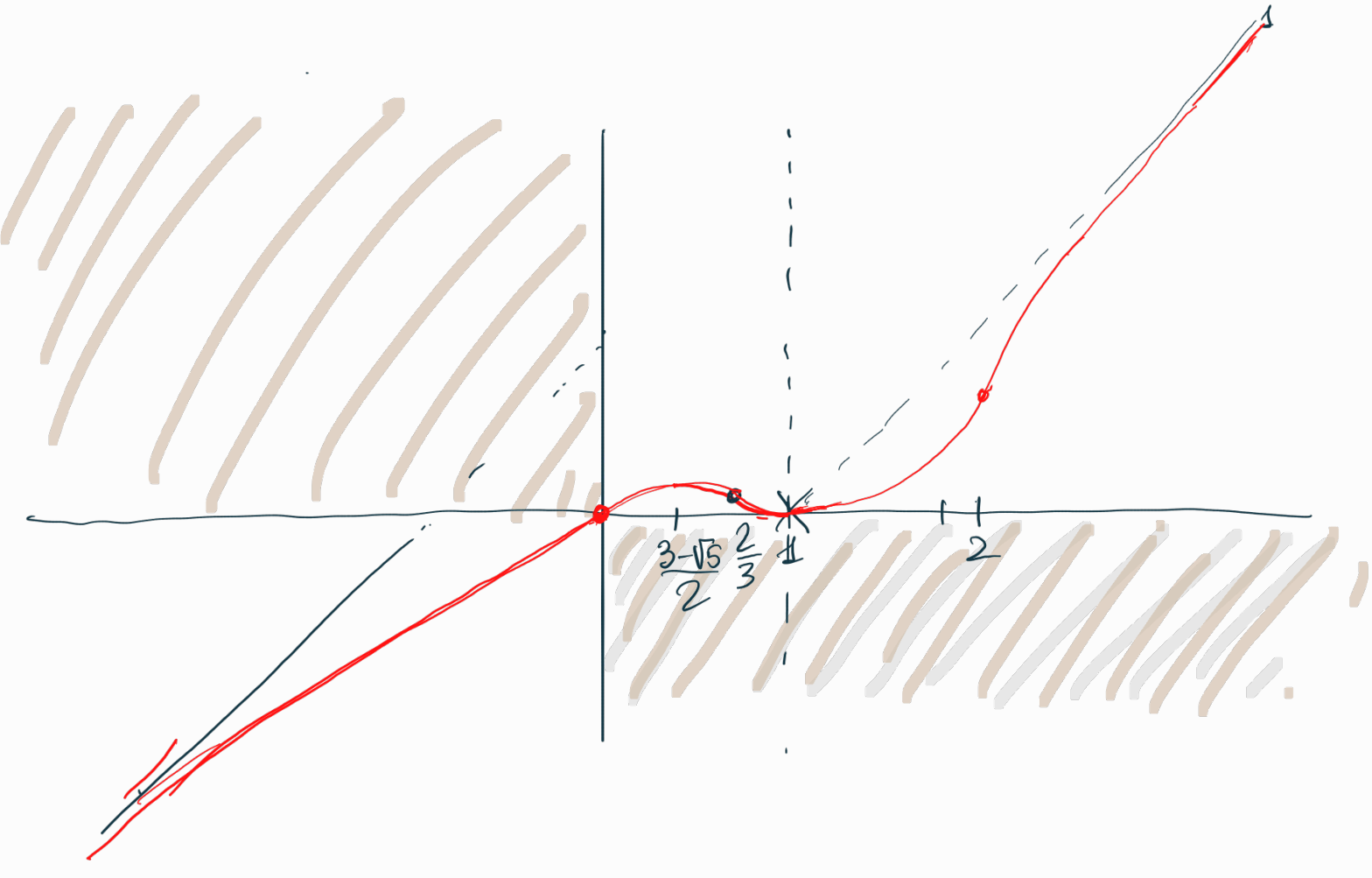
Riprendiamo lo studio di funzione visto ieri

$$f(x) = x\, e^{-\frac{1}{|x-1|}}$$

Avevamo trovato

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}} \left(1 + \frac{x}{(x-1)^2}\right) & \text{se } x > 1 \\ e^{\frac{1}{x-1}} \left(1 - \frac{x}{(x-1)^2}\right) & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Derivata seconda:



$f''(x)$

$x > 1$

$$f''(x) = \left(e^{-\frac{1}{x-1}} \left(1 + \frac{x}{(x-1)^2} \right) \right)' =$$

$$= e^{-\frac{1}{x-1}} \left[\frac{1}{(x-1)^2} \left(1 + \frac{x}{(x-1)^2} \right) + \frac{(x-1)^2 - x\,2(x-1)}{(x-1)^4} \right] =$$

$$= e^{-\frac{1}{x-1}} \left[\frac{(x-1)^2 + x + (x-1)^2 - 2x(x-1)}{(x-1)^4} \right] =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4} \left[2x^2 - 4x + 2 + x - 2x^2 + 2x \right] =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4} (2-x) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{per } 1 < x < 2 \\ \text{per } x = 2 \\ \text{per } x > 2 \end{array}$$

f strett. convessa in $(-1, 2]$
strett. concava in $[2, +\infty)$
$x = 2$ pto di flesso.

$x < 1$

$$f''(x) = \left(e^{\frac{1}{x-1}} \left(1 - \frac{x}{(x-1)^2} \right) \right)' =$$

$$= e^{\frac{1}{x-1}} \left[-\frac{1}{(x-1)^2} \left(1 - \frac{x}{(x-1)^2} \right) - \frac{(x-1)^2 - x\,2(x-1)}{(x-1)^4} \right]$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4}\left[-(x-1)^2 + x - (x-1)^2 + 2x(x-1)\right] =$$

$$= \text{''} \quad \left[-2x^2 + 4x - 2 + x + 2x^2 - 2x\right]$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4}\left[3x-2\right]$$

$f''(x) > 0 \quad \frac{2}{3} < x < 1 \quad f$ strett. convessa in $\left[\frac{2}{3}, 1\right)$

$< 0 \quad x < \frac{2}{3} \quad f$ strett. concava in $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$

$= 0 \quad x = \frac{2}{3}$ pto di flesso

Studio di funzione di

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

dominio: entrambe $\mathbb{R}$, continue, derivabile quante volte serve C^∞

Segno

$$\sinh x \gtreqless 0 \iff e^x \gtreqless e^{-x} \iff x \gtreqless -x \iff x \gtreqless 0$$

$\cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Simmetrie: $\cosh x$ è pari

$\sinh x$ è dispari.

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$$

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x$$

Limiti $\lim_{x\to+\infty} \sinh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \cosh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$

$\sinh(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 0$, $\cosh 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$

Non hanno asintoti obliqui perché

$\sinh x \sim \frac{e^x}{2}$ per $x \to +\infty$

$\cosh x \sim \frac{e^x}{2}$.

Derivate

$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$