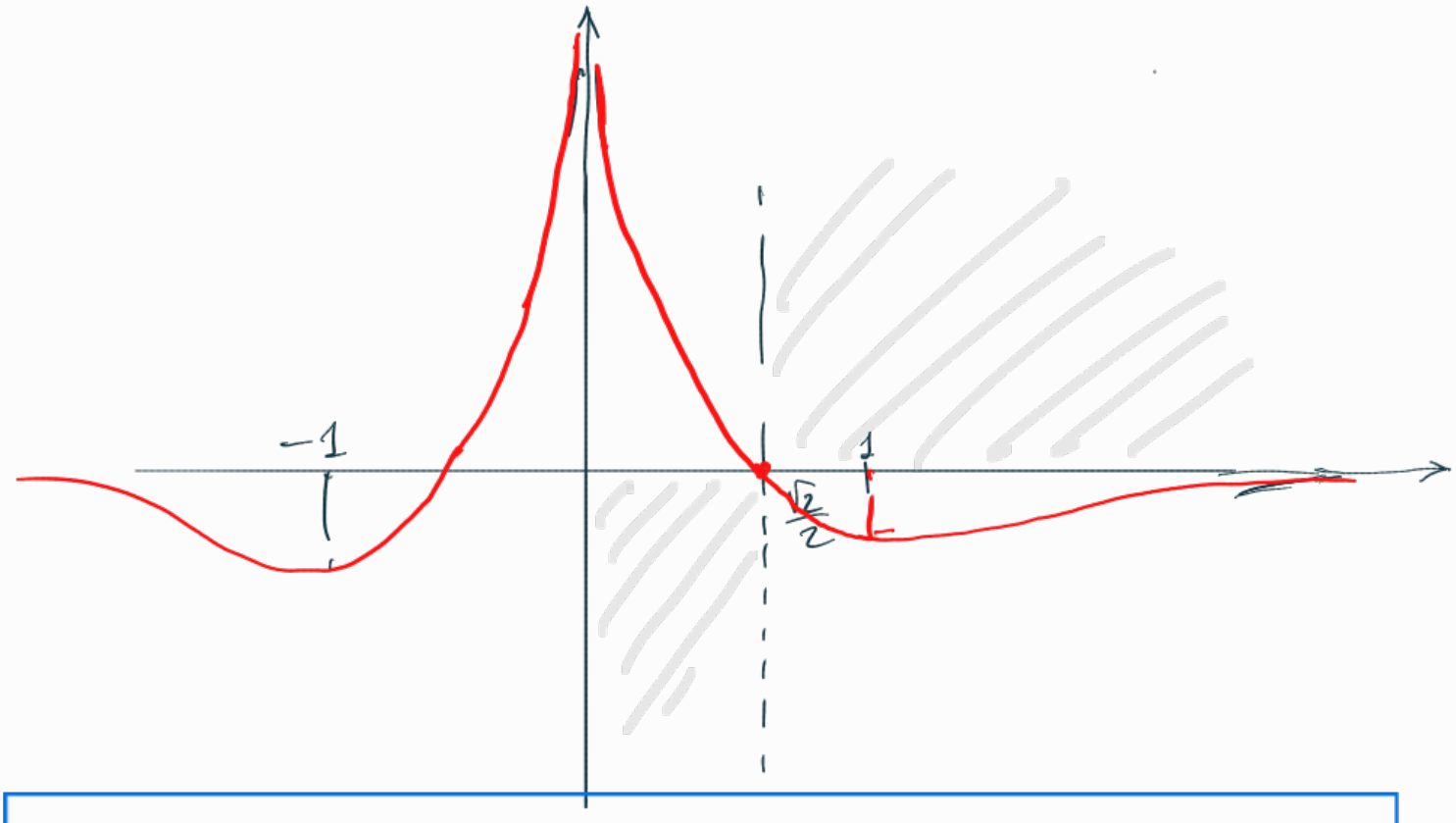
Studio di $f(x) = x^{-4} - 2x^{-2} = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}$

Ieri abbiamo visto che il suo grafico è il seguente:



DEF Diremo che la retta verticale $x = x_0$ è un asintoto verticale di f se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

(basta una delle due)

Nel nostro caso la retta $x = 0$ (asse delle y) è asintoto verticale di f.

DEF La retta orizzontale $y = y_0$ si dice **asintoto orizzontale** di f per $x \to \pm\infty$ se

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$$

Nel nostro caso la retta $y=0$ (asse delle x) è asintoto orizz. di f per $x \to +\infty$ (e anche per $x \to -\infty$)

OSS Spesso si ragiona in questo modo:

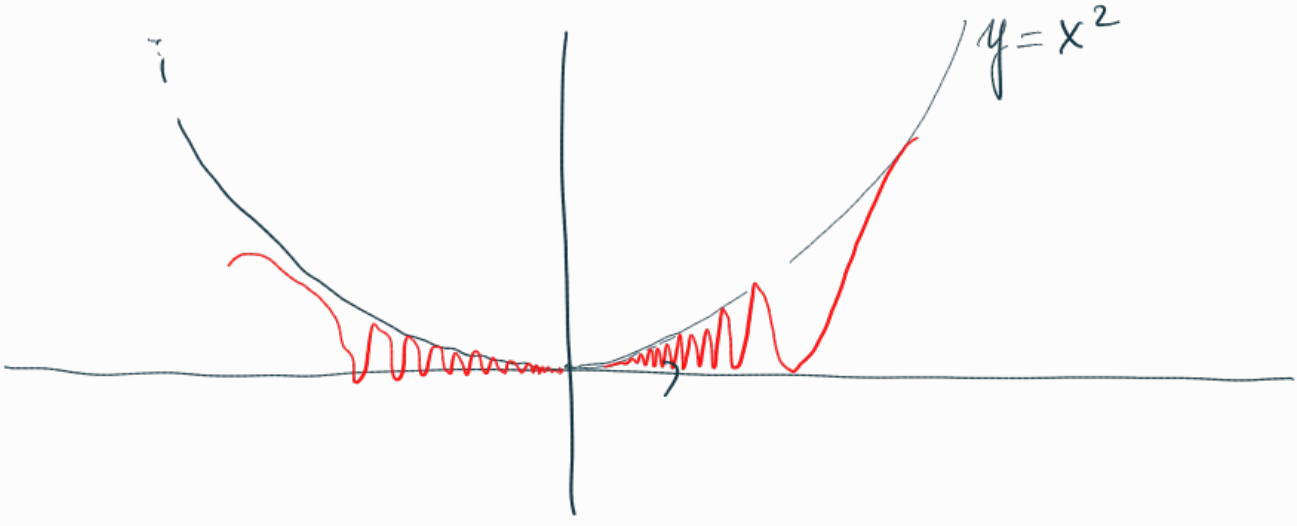
f decrescente in $(x_0-\delta, x_0]$ e f crescente in $[x_0, x_0+\delta)$ $\Rightarrow$ x_0 è pto di minimo locale di f

La freccia si inverte?

NO, controesempio

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

oscilla tra 0 e 1



$x_0=0$ è pto di minimo assoluto, ma non c'è nessun intorno destro di x_0 in cui f è crescente, né alcun intorno sinistro di x_0 in cui f è decrescente.

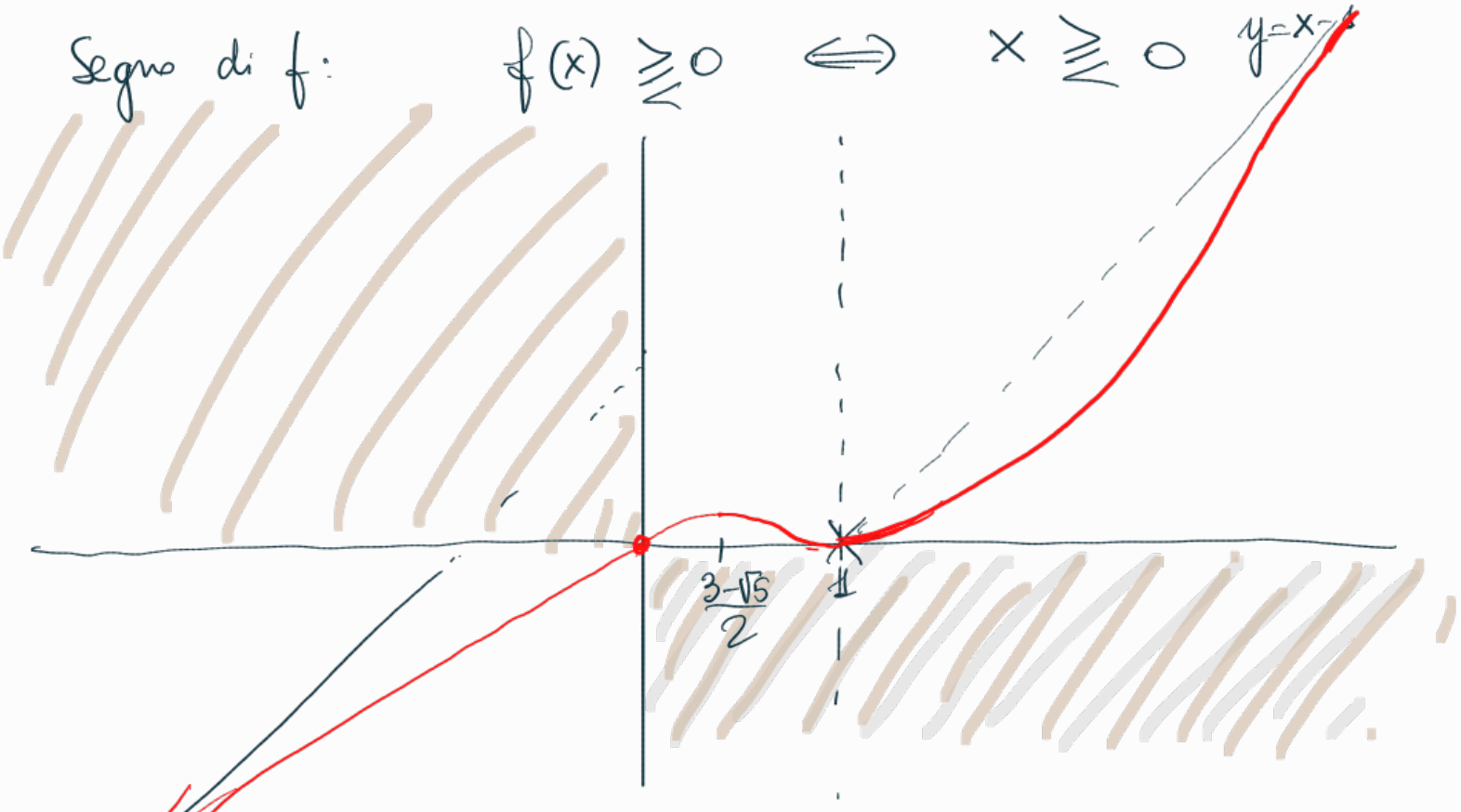
Studio di funzione

$$f(x)= x\, e^{-\frac{1}{|x-1|}} = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{x-1}} & x>1 \\ x e^{\frac{1}{x-1}} & x<1 \end{cases}$$

Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Non ci sono simmetrie evidenti

Segno di f: $f(x) \gtrless 0 \iff x \gtrless 0$



Continuità e limiti significativi:

f è continua nel suo dominio (anzi, derivabile, perché l'unico punto che potrebbe avere pb. di derivabilità a causa del valore assoluto, cioè $x=1$, è escluso dal dominio

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty}\ \underbrace{e^{-\frac{1}{x-1}}}_{\to e^0=1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x}_{\to-\infty}\ \underbrace{e^{\frac{1}{x-1}}}_{\to 1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x\, e^{-\frac{1}{|x-1|}} = 0$$

$-\frac{1}{|x-1|} \to -\infty$, $\left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$

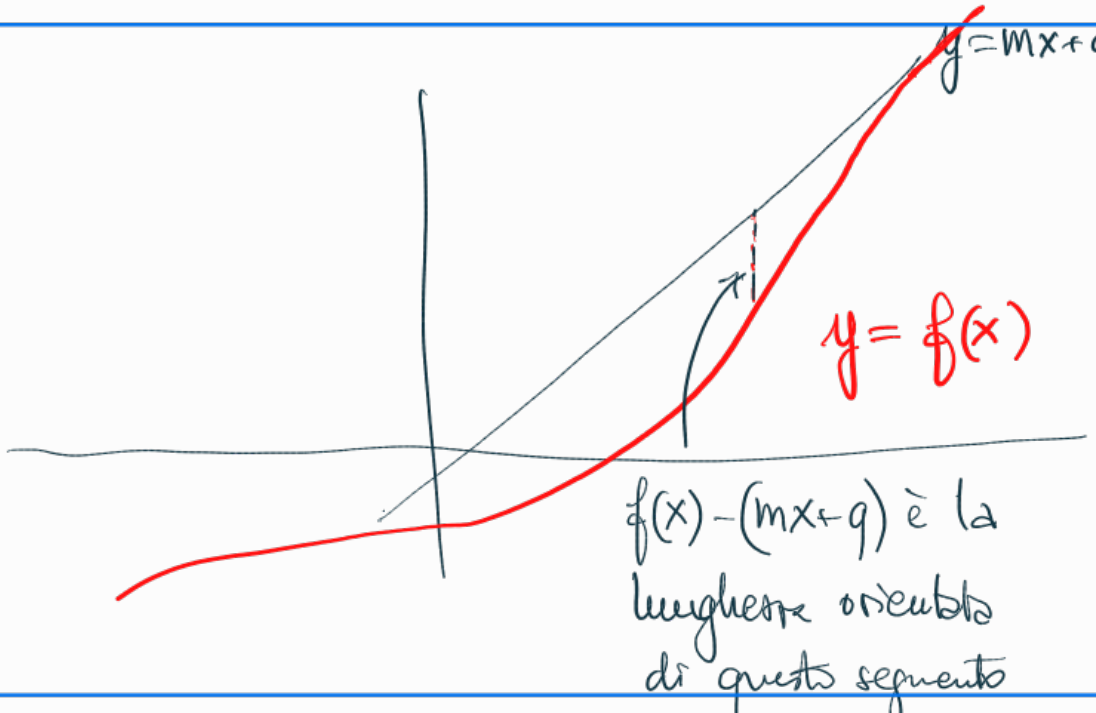
Ne segue che f è estendibile con continuità in $x=1$, cioè se poniamo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

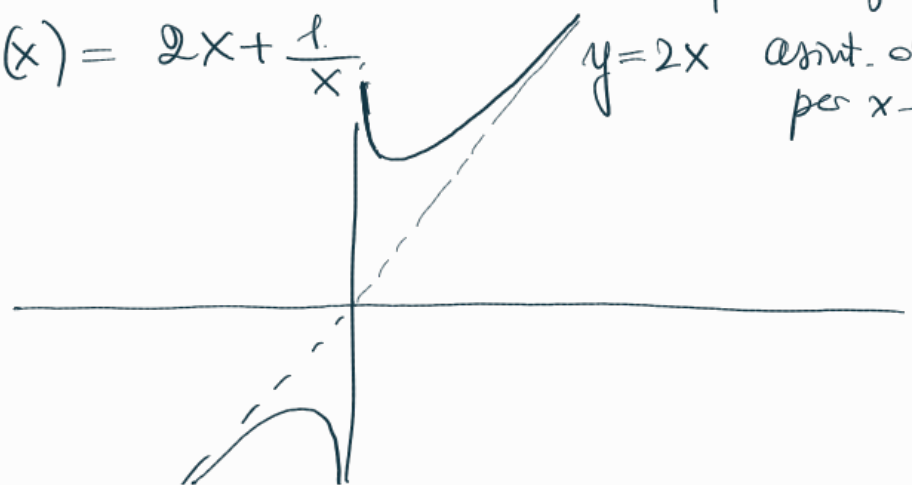
$\tilde{f}$ è continua in $\mathbb{R}$.

DEF Una retta di equazione $y = mx+q$, $(m, q \in \mathbb{R}, m \neq 0)$ si dice asintoto obliquo di f per $x \to \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ se

$$\lim_{x \to \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}} \left[f(x) - (mx+q) \right] = 0$$



Esempio $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$. $y=2x$ asint. obl. per $x \to +\infty$



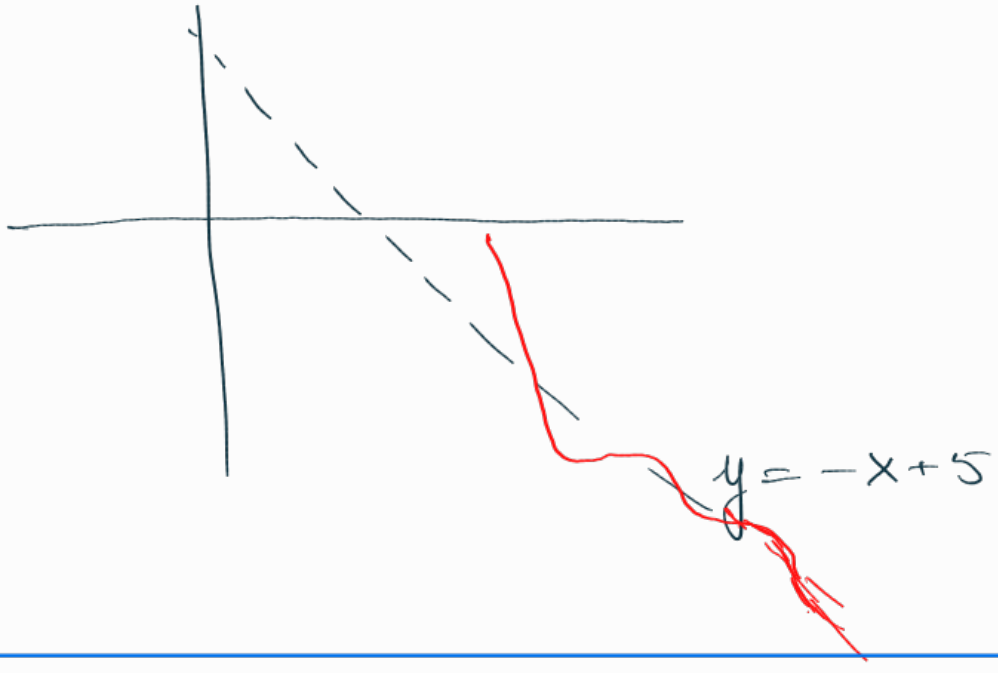
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2x+\frac{1}{x}-2x\right)=0$$

Esempio $\quad f(x)=-x+5+\dfrac{\sin x}{x}$

per $x\to+\infty$ la retta $y=-x+5$ è asint. obliquo di f.

Infatti

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-x+5)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$



Come si trovano gli asintoti obliqui

PROP

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ -\infty}}\left(f(x)-(mx+q)\right)=0 \iff \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ -\infty}}\dfrac{f(x)}{x}=m\\ \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ -\infty}}\left(f(x)-mx\right)=q\end{cases}$$

Dim "$\Leftarrow$" è banale (l'ultimo limite è ciò che devo provare)

" $\Rightarrow$ " Sapendo che $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx - q\right) = 0$,

devo provare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x) - mx - q}{x} + \frac{mx+q}{x} \right) = m$$

$\frac{f(x) - mx - q}{x} \to \left(\frac{0}{+\infty}\right) = 0$

$\frac{mx+q}{x} \to m$

□

OSS se uno dei due limiti a destra non esiste oppure viene ∞, l'asintoto obliquo non esiste.

Torniamo alla nostra $f(x) = x e^{-\frac{1}{|x-1|}}$

$x \to +\infty$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x-1}} = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x e^{-\frac{1}{x-1}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \left(e^{-\frac{1}{x-1}} - 1 \right) =$$

$-\frac{1}{x-1} \to 0$

$e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{x}{x-1} \right) = -1$$

$y = x - 1$ è asintoto obl. per $x \to +\infty$

$x \to -\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right) = 1$$

$\frac{1}{x-1} \to 0$

$\frac{1}{x-1} \to 0$

$y = x + 1$ asintoto obliquo per $x \to -\infty$

Studio f'

$x > 1$

$$f'(x) = \left(x e^{-\frac{1}{x-1}}\right)' = e^{-\frac{1}{x-1}} + x e^{-\frac{1}{x-1}} \frac{1}{(x-1)^2} =$$

$$= e^{-\frac{1}{x-1}} \left[1 + \frac{x}{(x-1)^2}\right] > 0 \quad \forall x > 1$$

$x < 1$

$$f'(x) = \left(x e^{\frac{1}{x-1}}\right)' = e^{\frac{1}{x-1}} \left(1 - \frac{x}{(x-1)^2}\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{x-1}} \frac{(x-1)^2 - x}{(x-1)^2} = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} \left(x^2 - 3x + 1\right)$$

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 3x + 1 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ non accett. perché è > 1.

$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}4$ OK.

$f'(x) > 0 \iff x^2 - 3x + 1 > 0 \iff \left(x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \vee \left(x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

$f'(x) < 0 \iff \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1$

f strett. crescente in $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$ e in $(1, +\infty)$

ma, attenzione, non in $(\,] \cup (1, +\infty)$!

f strett. decrescente in $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$

$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è pto di max locale (non assoluto)

Vediamo quanto vale $\lim_{x \to 1^+} f'(x)$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \underbrace{e^{-\frac{1}{x-1}}}_{\to 0} \underbrace{\left(1 + \frac{x}{(x-1)^2}\right)}_{\frac{x}{(x-1)^2} \sim \frac{1}{(x-1)^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} =$$

poniamo $\frac{1}{x-1} = t \to +\infty$

$$= \lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}\left(1-\frac{x}{(x-1)^2}\right) =$$

$\frac{x}{(x-1)^2} \to +\infty$

$$1-\frac{x}{(x-1)^2} \sim -\frac{x}{(x-1)^2} \sim \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\right) =$$

$t = \frac{1}{x-1} \to +\infty$

$$\frac{1}{(x-1)^2} = t^2$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t^2}{e^t}\right) = 0$$

Conseguenza: la funzione è estendibile in modo derivabile in $x=1$, cioè

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

risulta non solo continua ma derivabile in $x=1$,

e $\tilde{f}'(1) = 0$

(perché $\tilde{f}'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 0$, $\tilde{f}'_-(1) = \dots = 0$

Derivata seconda

Sia f derivabile in $X \subseteq \mathbb{R}$, $f' : X \to \mathbb{R}$

Sia $x_0 \in X$. Diremo che f è derivabile due volte in x_0 se f' è derivabile in x_0, cioè se $\exists$ finito il limite.

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$$

derivata seconda di f in x_0.

Altre notazioni:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = D^2 f(x_0) = \ddot{f}(x_0)$$

Esempi

- $f(x) = 5x+3 \Rightarrow f'(x) = 5 \Rightarrow f''(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow f''(x) = -\cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \cos(\log x) \qquad x > 0$

$$f'(x) = -\frac{\sin(\log x)}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{\cos(\log x) - \sin(\log x)}{x^2} \qquad \forall x > 0.$$

- $f(x) = x^{5/3} \qquad x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{5}{3} x^{2/3} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{10}{9} x^{-1/3} & \forall x \neq 0 \\ \nexists & x = 0 \end{cases}$$

Per $x=0$? $f''_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f''(x) = +\infty$

$$f''_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f''(x) = -\infty$$

- $f(x) = x|x|$

$f'(x) = 2|x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = \begin{cases} +2 & \text{se } x > 0 \\ -2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Non è derivabile 2 volte in $x = 0$.

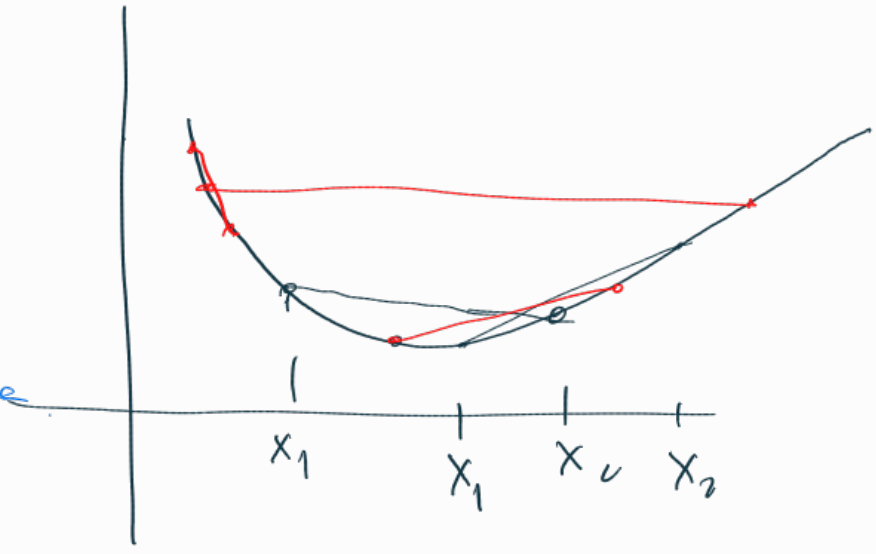
DEF (def geometrica di funzioni concave/convesse)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo)

Diremo che f è

- **convessa in I** se, presi comunque due punti distinti $x_1, x_2 \in I$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ non ha punti al di sotto del grafico di f.
- **strett. convessa in I** se, presi comunque $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ è strettamente al di sopra del grafico di f nell'intervallo (x_1, x_2) (esclusi gli estremi).

f convessa,
ma anche
strettamente convessa



f convessa ma non
strettamente convessa
$f(x)=|x|$

