TEOREMA di Fermat (sugli estremi locali)

Siano $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile in $x_0 \in I$.

Sia x_0 interno all'intervallo (cioè non è uno degli estremi dell'intervallo)

Se x_0 è un pto di estremo locale di f (cioè di max. locale o di min. locale di f), allora

$$f'(x_0) = 0$$

Dim Sia x_0 pto di min locale $\Rightarrow \exists\, \mathcal{U}$ centrato in x_0 t.c. $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in \mathcal{U} \subseteq I$

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

($f(x) - f(x_0) \geq 0$ se $x \in \mathcal{U}$; $x - x_0 > 0$)

per la permanenza del segno

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

($f(x) - f(x_0) \geq 0$; $x - x_0 < 0$)

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

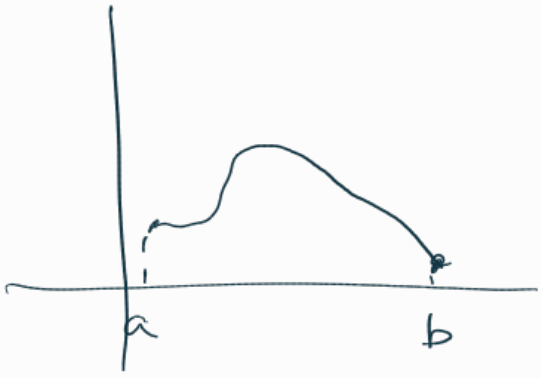
□

Cosa succede se x_0 è uno dei due estremi dell'intervallo?

Per es, se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ammette un min locale in b, supponendo che f sia derivabile in b.

In questo caso sopravvive solo la seconda parte della dim.

$\Rightarrow \boxed{f'(b) \leq 0}$



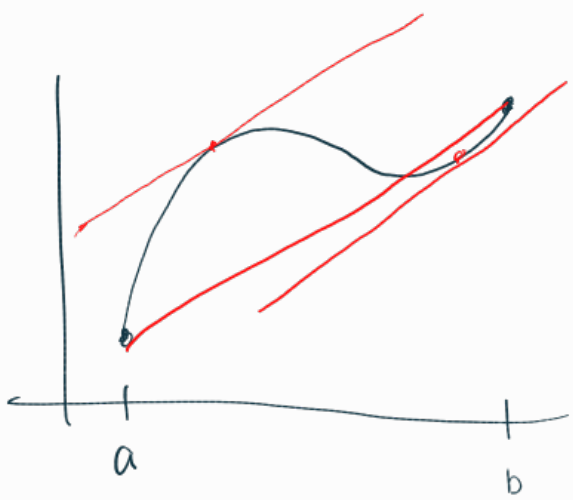
Teorema di Lagrange.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$
derivabile in (a,b).

Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

↑ coeffte angolare della retta passante per $(a,f(a)), (b,f(b))$

Significato geom.



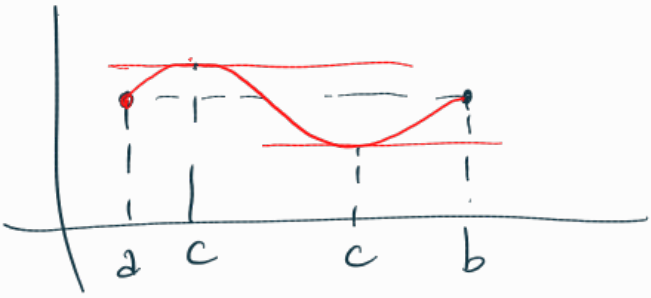
Esiste (almeno) un punto c $c \in (a,b)$ in cui la tangente al grafico è parallela alla corda tracciata tra i due punti estremi del grafico.

Quindi: anche un rapporto incrementale tra pti "lontani" è una derivata in un punto intermedio.

Il caso particolare in cui $f(a) = f(b)$ si dice teor. di Rolle.

TEOREMA di ROLLE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b), e inoltre $f(a) = f(b)$, allora

$\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$



Dim - teor. di Rolle:

Per Weierstrass, f ammette max. e min. assoluti. Due casi:

1) Entrambi gli estremi assoluti sono assunti agli estremi dell'intervallo. In tal caso $f(x) \equiv$ costante $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ogni $c \in [a,b]$ verifica $f'(c) = 0$.

2) Almeno uno tra max. assoluto e min. assoluto è assunto all'interno dell'intervallo. Per il teorema di Fermat f' in tale punto vale zero $\square$

Dim. Teor. di Lagrange

Ci riconduciamo al teorema di Rolle, ponendo

$$g(x) = f(x) - \underbrace{\left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right]}_{\text{retta passante per } (a,f(a)),(b,f(b))} \quad \forall x \in [a,b]$$

Affermo che $g(x)$ verifica le ipotesi del thm di Rolle.

g continua in $[a,b]$? sì perché f lo era.

g derivabile in (a,b)? " " " "

$$g(a) = \cancel{f(a)} - \left[\cancel{f(a)} + \cancel{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}(a-a) \right] = 0$$

$$g(b) = f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) \right] = 0$$

Rolle $\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ t.c. $g'(c) = 0$

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

□

TEOREMA di CAUCHY Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a,b]$, derivabili in (a,b).
Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$(f(b)-f(a))\, g'(c) = (g(b)-g(a))\, f'(c)$$

che si legge anche

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$ se i denominatori sono diversi da zero

Dim (per facile esercizio): si applica Rolle alla nuova funzione

$$h(x) = (f(b)-f(a))\, g(x) - (g(b)-g(a))\, f(x)$$

□

Dal teorema di Lagrange segue il seguente

CRITERIO DIFFERENZIALE di MONOTONIA

Sia I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile nei punti interni di I. Allora

1) $f'(x) \geq 0 \ \forall x$ interno a $I \iff f$ crescente in I.

2) $f'(x) \leq 0 \ \forall x$ interno a $I \iff f$ decrescente in I

3) $f'(x) > 0$ " " $\Rightarrow f$ strett. crescente in I

4) $f'(x) < 0$ " " $\Rightarrow f$ strett. decrescente in I

OSS in 3) e 4) non vale la freccia "$\Leftarrow$".
Per es. $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, ma $f'(x) = 3x^2$ si annulla in $x = 0$.

Dim 1) $\boxed{\Leftarrow}$ e anche 2 $\boxed{\Leftarrow}$

Supponiamo f crescente in I, cioè

se $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Sia x_0 interno a I.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

per la permanenza del segno.

OSS. (se f è crescente) $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x, x_0 \in I$, con $x \neq x_0$

Se $x > x_0$, NUM ≥ 0, DEN > 0 $\Rightarrow$ frazione ≥ 0

Se $x < x_0$ NUM ≤ 0, DEN < 0 $\Rightarrow$ viene ≥ 0

Dim 1) $\boxed{\Rightarrow}$ Supponiamo $f'(x) \geq 0$ $\forall x$ interno a I.

Devo provare f crescente in I.

se $x_1 < x_2$; $x_1, x_2 \in I$, voglio provare che $f(x_1) \leq f(x_2)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}_{= f'(c) \geq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0$$

applico Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$

e così si dimostrano anche 2), 3), 4) $\boxed{\Rightarrow}$ □

CONSEGUENZE E APPLICAZIONI

COROLLARIO (caratterizzazione delle funz. costanti)

f costante in I intervallo $\iff$ $f'(x) = 0$ $\forall x \in I$

"$\Rightarrow$" ovvia

"$\Leftarrow$": per il criterio di monotonia, f è simultaneamente crescente e decrescente in $I \Rightarrow f$ costante.

Proviamo che

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \qquad \forall x \in [-1, 1]$$

Considero $f(x) = \arccos x + \arcsin x$ continua in $[-1, 1]$

derivabile in $(-1, 1)$

$$f'(x) = -\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} = 0 \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \text{costante} = f(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1,1] \qquad \square$$

Proviamo che $\log x \leq x - 1 \quad \forall x > 0$

Considero $f(x) = x - 1 - \log x \overset{?}{\geq} 0 \quad \forall x > 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \qquad \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 1 \\ = 0 & \text{se } x = 1 \\ < 0 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

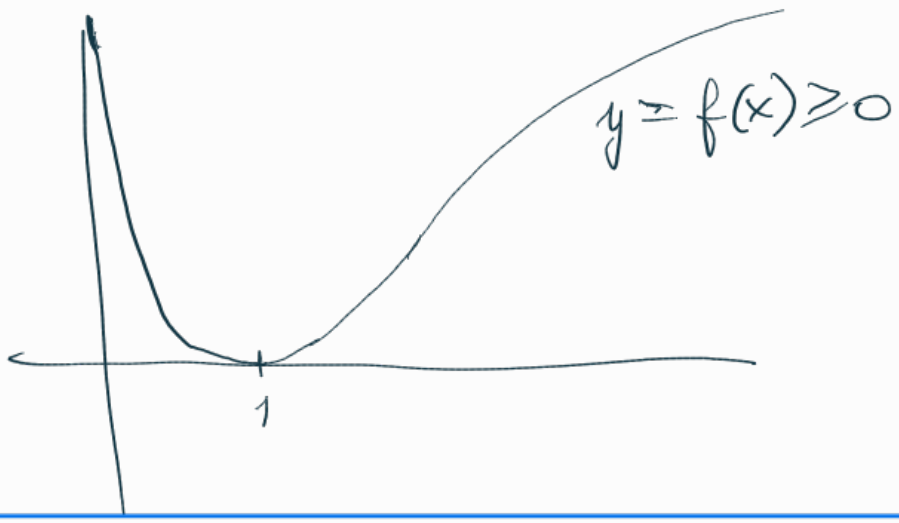
($x > 0$)

Criterio di monotonia. $\Rightarrow$ f strett. crescente in $[1, +\infty)$

f strett. decresc. in $(0, 1]$

$x = 1$ pto di min. assoluto

$f(1) = 0$



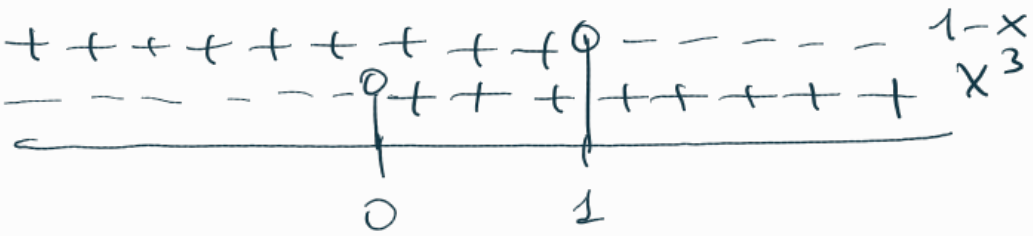
Esercizio per casa: provare che $e^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Esercizio: Trovare estremi locali e assoluti di

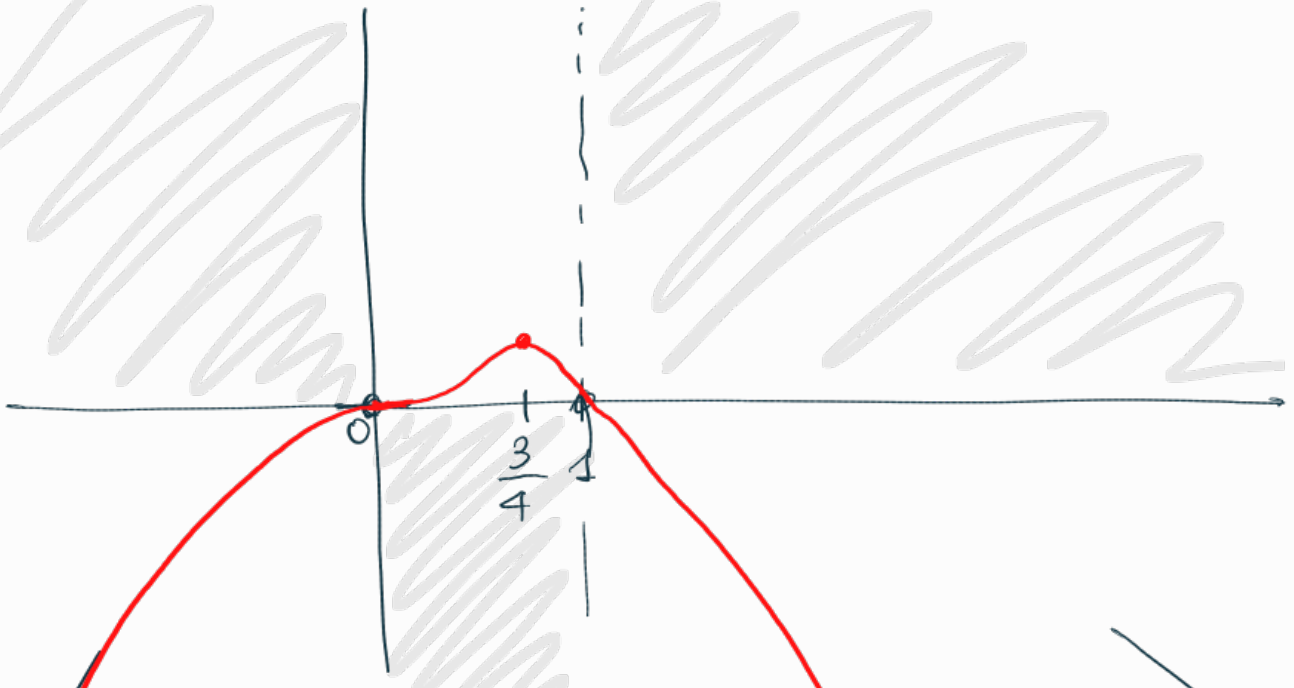
$$f(x) = x^3(1-x) = x^3 - x^4$$

dom $f = \mathbb{R}$

segno di f



$$f(x) \begin{cases} >0 & \forall x \in (0,1) \\ <0 & \forall x \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty) \\ =0 & (x=0) \vee (x=1) \end{cases}$$



$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ +}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ +}} (x^3 - x^4) = -\infty$$

$$f'(x) = (x^3 - x^4) = 3x^2 - 4x^3 = x^2(3-4x)$$

$$f'(x) = 0 \iff (x=0) \vee \left(x = \frac{3}{4}\right)$$

$$f'(x) > 0 \iff x < \frac{3}{4}, \; x \neq 0$$

$$f'(x) < 0 \iff x > \frac{3}{4}$$

f strett. crescente in $(-\infty, 0]$ e in $\left[0, \frac{3}{4}\right]$

$\Rightarrow$ strett. crescente in $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$

f strett. decresc. in $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$

$x = \frac{3}{4}$ è pto di massimo assoluto

Provare che $\underbrace{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}_{f(x)} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0$

$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Studiamo in $(0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \equiv 0$$

$\Rightarrow f$ è costante in $(0, +\infty)$

$$f(x) = f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

N.B

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x < 0$$

perché f è dispari.

Applicazione: Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to +\infty$ di $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \quad \text{per } x \to +\infty$$

(per $x > 0$)

infinitesimo di ordine 1.

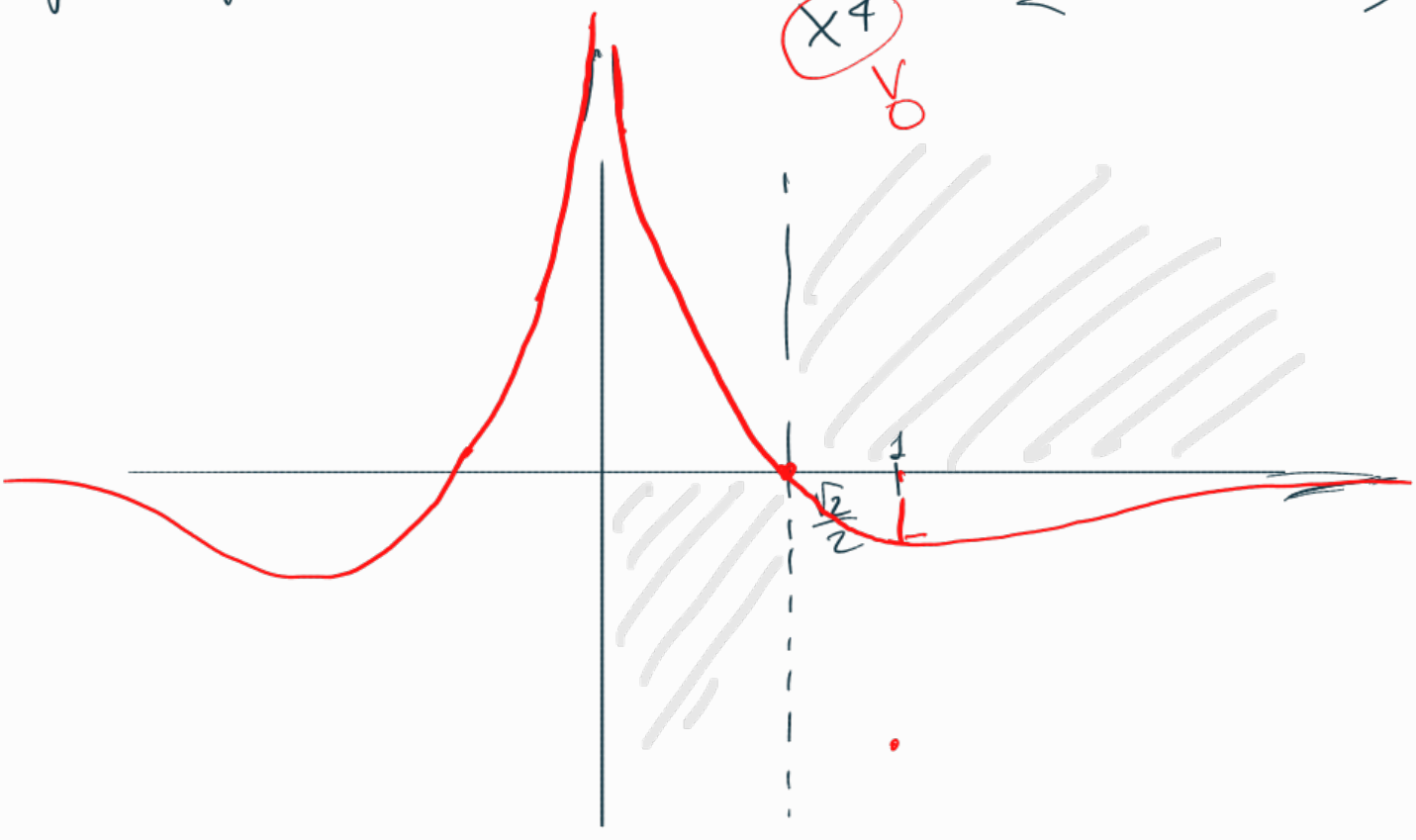
Studio di $f(x) = x^{-4} - 2x^{-2} = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}$

dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

f è pari $\Rightarrow$ la studio solo per $x \geq 0$

Segno di f $\quad f(x) = \frac{1-2x^2}{x^4} \gtreqless 0 \iff x \lesseqgtr \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad (x \geq 0)$

$x^4 \to 0$



Continuità e limiti significativi: f è continua nel suo dominio

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1-2x^2}{x^4} = +\infty$$

$1 - 2x^2 \to 1$, $x^4 \to 0^+$

L'asse delle y è asintoto verticale (vedi definizione dopo)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-2x^2}{x^4} = 0^-$$

$1 - 2x^2 \sim -2x^2$

Asse delle x è asintoto oriz. per $x \to +\infty$ (vedi def. dopo)

$$f'(x) = \left(x^{-4} - 2x^{-2}\right)' = -4x^{-5} + 4x^{-3} =$$

$$= 4\,\frac{-1+x^2}{x^5} = 4\,\frac{(x^2-1)}{x^5}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 1$$

$$x > 0$$

$$> 0 \iff x > 1$$

$$< 0 \qquad 0 < x < 1$$

f strett. crescente in $[1, +\infty)$

" decrescente in $(0, 1]$

$x = 1$ pto di min. assoluto.