TEOREMA (derivata della funzione inversa).

Siano I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua e strett. monotòna

(quindi $\operatorname{im} f = J$ intervallo, $f: I \to J$ biiettiva,

$\exists\, f^{-1}: J \to I$ continua e strett. monotòna)

Se f è derivabile in $x_0 \in I$, e $f'(x_0) \neq 0$,

allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, e si ha.

$\Updownarrow$

$x_0 = f^{-1}(y_0)$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

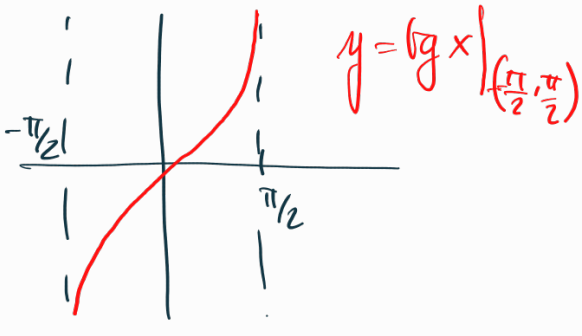
Conseguenze.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x \Big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}^{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} : (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

continua, biiettiva, strett. crescente



$f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$y \longmapsto \operatorname{arctg} y =$ l'unico $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ t.c. $\operatorname{tg} x = y$.

$f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x > 0 \qquad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Applichiamo il teorema con $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ generico

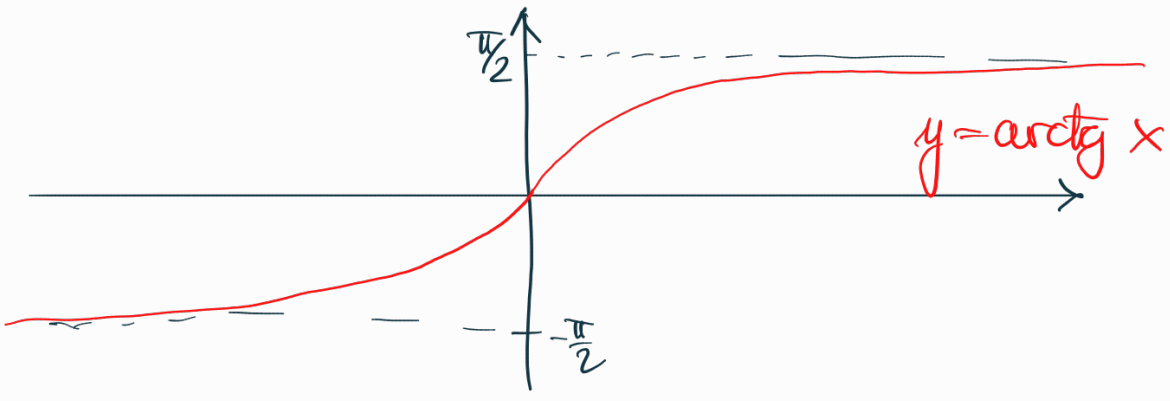
(cioè $y = \operatorname{tg} x \in \mathbb{R}$ generico)

dove $y = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} y$

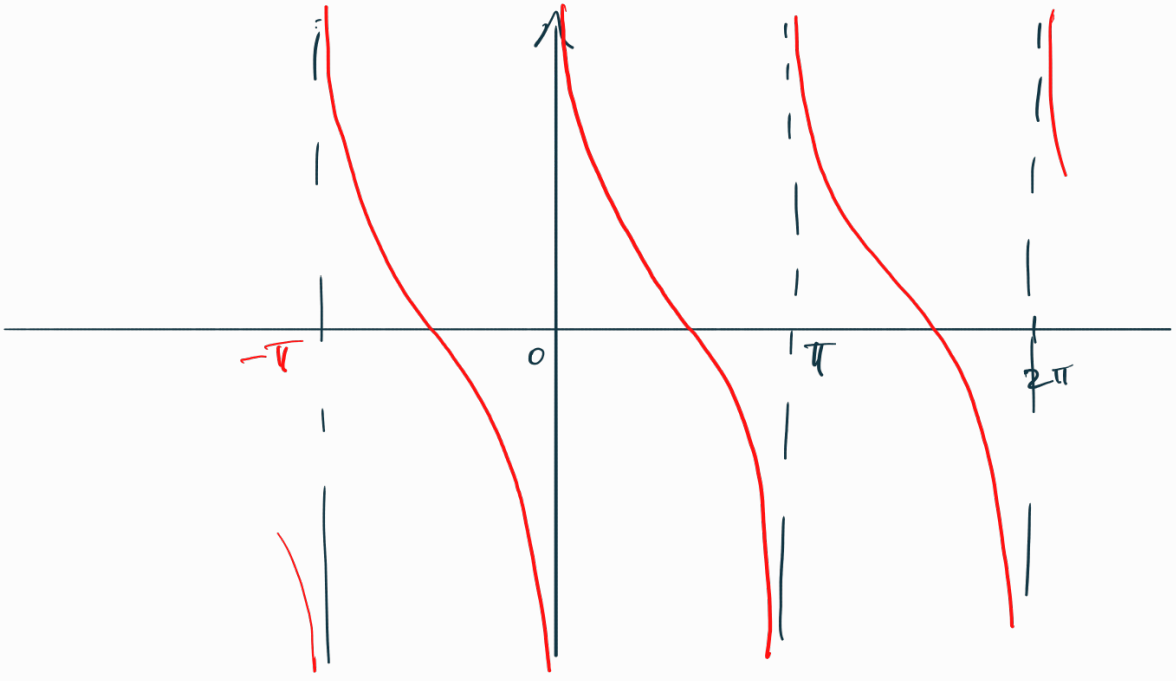
$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{1}{1 + y^2} \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$



$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \forall x \neq k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$.

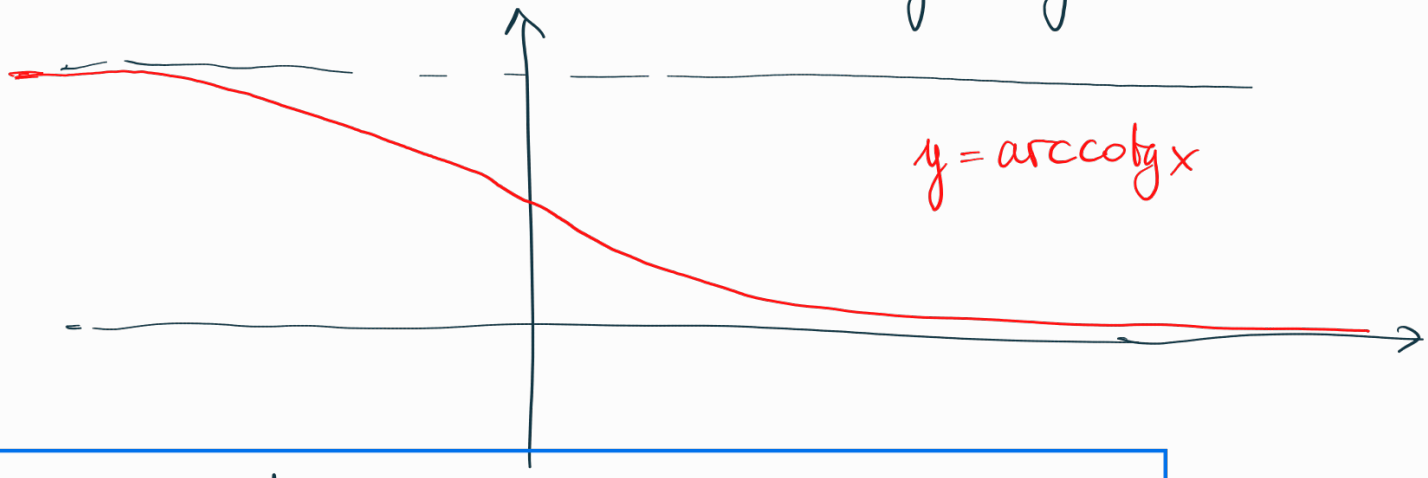


$\operatorname{cotg} x\big|_{(0,\pi)} : (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ strett. decrescente, biettiva, derivabile.

$$(\operatorname{cotg} x)' = -(1+\operatorname{cotg}^2 x) \qquad \forall x \in (0,\pi)$$

$f^{-1}(y) = \operatorname{arccotg} y : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\pi)$

$y \mapsto \operatorname{arccotg} y =$ l'unico $x \in (0,\pi)$ t.c. $\operatorname{cotg} x = y$.



$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dim. teorema

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - \overbrace{f^{-1}(y_0)}^{x_0}}{y - y_0} =$$

$y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$

Pongo $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0$ perché sappiamo che f^{-1} è continua

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)} = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \square$$

$\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) \to f'(x_0) \neq 0$

Estensione del teorema

Supponiamo $f : I \to J$ strett. crescente (decrescente), continua e biiettiva.

Sia $x_0 \in I$ t.c. f derivabile in x_0, e $f'(x_0) = 0$

Allora f^{-1} ha nel punto $y_0 = f(x_0)$ un pto a tg. verticale

cioè $(f^{-1})'(y_0) = +\infty$ $-\infty$

Dim.

Stessi passaggi di prima

$$(f^{-1})'(y_0) = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

$\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) \to f'(x_0) = 0$ perché f strett. crescente

Applicazioni

1) $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strett. crescente

$x_0 = 0 \quad f'(x_0) = 3x^2\Big|_{x=0} = 0$

$f(x_0) = y_0 = 0$

$\Rightarrow$

$(f^{-1})'(0) = +\infty$

$\left(\sqrt[3]{x}\right)'\Big|_{x=0}$

2) $\sin x\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ strett. crescente

$(\sin x)' = \cos x$

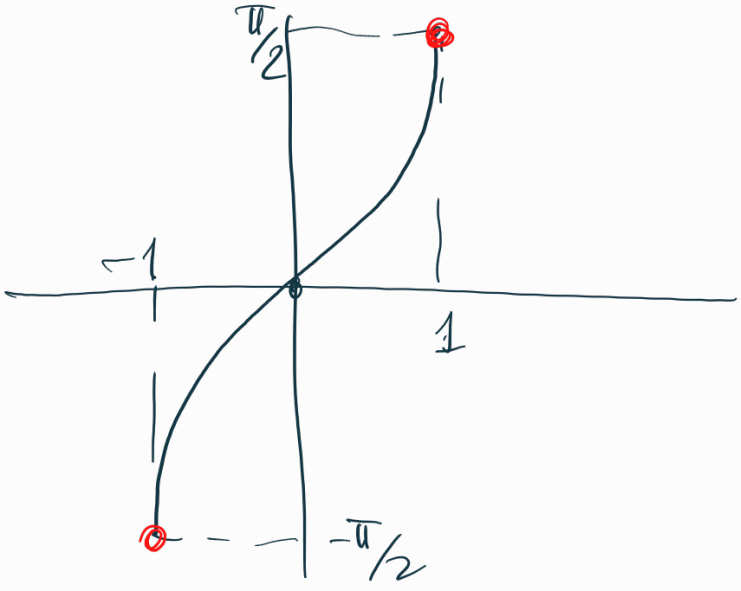
$\sin'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Il nuovo teorema dice che in $y_0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\arcsin'(1) = +\infty$

e se prendo $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, $y_0 = -1$,

$\arcsin'(-1) = +\infty$

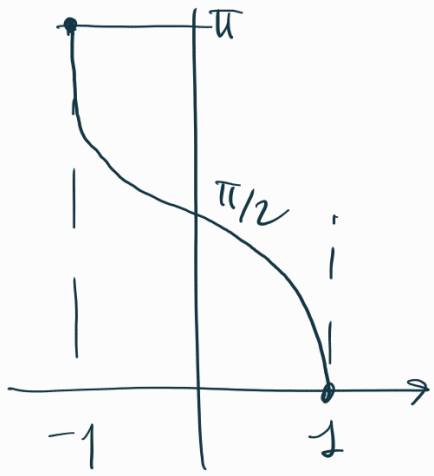


3) $\cos\Big|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$. strett. decrescente

$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.

Prendendo $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$

$x_0 = \pi \Rightarrow y_0 = -1$



$\arccos'(1) = \arccos'(-1) = -\infty$

DEF $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$.

x_0 si dice **pto di massimo assoluto** (minimo) di f in X

se $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in X$ ($\leq$)

x_0 si dice **punto di massimo locale** (o relativo di f) (minimo)

se $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c.

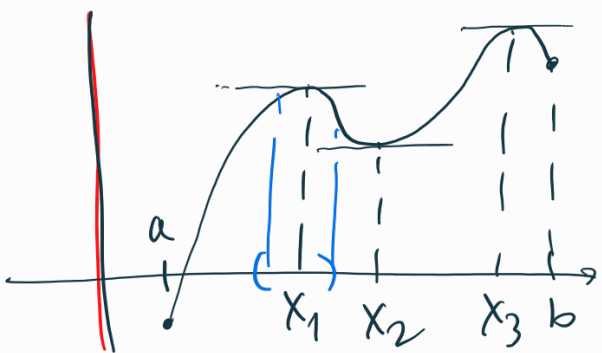
$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in U \cap X \quad (\leq)$$

x_0 si dice **punto di max. locale stretto** (min)

se $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c

$$f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\} \quad (<)$$

OSS Un pto di max. assoluto (min) è anche pto di max locale (min).



$y = f(x)$

a = pto di min. assoluto (e anche locale)

x_1 = pto di max. locale (stretto)

x_2 = " " min locale (stretto

x_3 = pto di max. assoluto (e anche locale)

b = pto di min. locale (stretto)

TEOREMA di Fermat (sugli estremi locali)

Siano $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile in $x_0 \in I$.

Sia x_0 interno all'intervallo (cioè non è uno degli estremi dell'intervallo)

Se x_0 è un pto di estremo locale di f (cioè di max. locale o di min. locale di f), allora

$$f'(x_0) = 0$$

DEF Diremo che x_0 è un punto critico (o stazionario) di f se $f'(x_0) = 0$

Il teorema di Fermat dice che:

Se x_0 è un punto interno di I in cui f è derivabile, allora

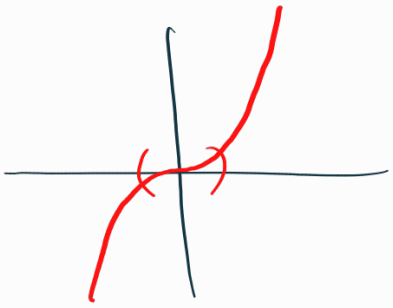
x_0 è pto di estremo locale di $f \Rightarrow x_0$ è pto critico di f

OSS 1 La freccia si inverte? vale il "$\Leftarrow$"?

NO, per es. se $f(x) = x^3$ in $\mathbb{R}$ $x_0 = 0$ è un punto cubico (perché $f'(x) = 3x^2 = 0$ se $x = 0$)

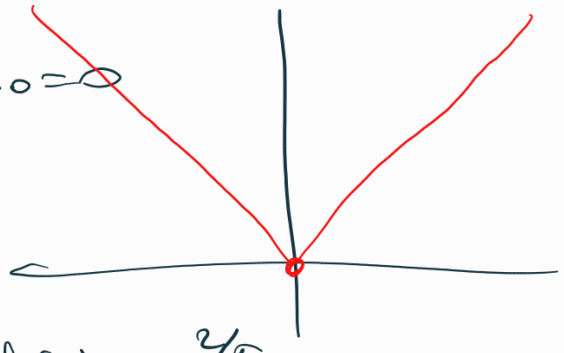
ma $x_0 = 0$ non è di estremo relativo

perché in ogni intorno di $x_0 = 0$ esistono sia punti in cui $f(x) < f(0) = 0$, sia punti in cui $f(x) > f(0) = 0$

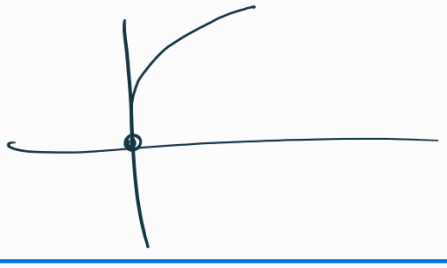


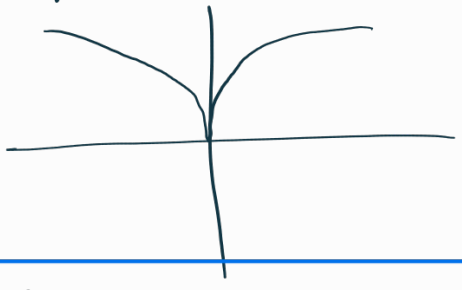
OSS 2 Ci possono essere pti di min. locale in cui f non è derivabile:

per es $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$



Altri esempi: $f(x) = \sqrt{x}$ oppure $f(x) = x^{2/5}$





COROLLARIO. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo), e sia $x_0 \in I$ un pto di max/min locale di f.

Allora x_0 deve appartenere a una delle seguenti tipologie:

a) x_0 è un pto critico interno

b) x_0 è un estremo dell'intervallo

c) x_0 è un punto di non derivabilità di f

COROLLARIO Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua.

Per Weierstrass essa ammette max e min. assoluti in $[a,b]$

Dove vengono assunti max. e min. assoluti?

Nei pti appartenenti ai tre tipi descritti nel corollario precedente.

Esempio Trovare max e min. assoluti di

$f(x)= x^3-5x+1$ nell'intervallo $[-1,2]$.

Vale Weierstrass $\Rightarrow$ f ha max. e min. assoluti.

In quali punti possono stare?

a) I pti critici interni

$$f'(x)= 3x^2-5=0 \iff x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}},$$

ma solo $x_1=\sqrt{\frac{5}{3}}$ sta nell'intervallo

b) estremi dell'intervallo $x_2=-1$, $x_3=2$

c) pti di non derivabilità: nessuno.

Calcolo f in questi tre pti.

$$f(-1)=-1+5+1=5$$

$$f(2)=8-10+1=-1$$

$$f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}-5\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}+1=\frac{5\sqrt{5}-15\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}+1=$$

$$= -\frac{10\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} + 1 \overset{?}{<} -1$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{10\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \overset{?}{>} 2 \quad \text{vero.}$$

$$\max_{[-1,2]} f = f(-1) = 5$$

$$\min_{[-1,2]} f = f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 1 - \frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Esercizio: Trovare max. e min. assoluti di

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} + \left|x - \frac{1}{2}\right| \quad \text{nel suo dominio.}$$

dom $f = [-1,1]$, f continua in $[-1,1] \Rightarrow$ vale Weierstrass.

a) cerco i pti critici.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 1 & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 & \text{se } x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

se $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ $\quad f'(x) = 0 \iff \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \iff$

$$\iff x = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{oss } (x > 0)$$

$$\iff x^2 = 1 - x^2$$

$$\iff 2x^2 = 1$$

$$\iff x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \boxed{x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ok}}$$

se $x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ $\quad f'(x) = 0 \iff \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -1$

$$\iff -x = \sqrt{1-x^2} \iff \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 = 1 - x^2 \end{cases} \iff \boxed{x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ok}}$$

b) estremi dell'intervallo $\boxed{x = -1}$ $\quad \boxed{x = 1}$

c) possibili pti di non derivabilità

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$ $\qquad x = -1$, $x = 1$ già considerati

Calcoliamo $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \left|x - \frac{1}{2}\right|$

$f(1) = \frac{1}{2}$, $\quad f(-1) = \frac{3}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}86$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \approx 0{,}91$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \sqrt{2} + \frac{1}{2} \approx 1{,}91$

$\max f = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 1{,}91$

$\min f = f(1) = \frac{1}{2}$

Esercizio: controllare che $x = \pm 1$ sono pti a tg. verticale

$x = \frac{1}{2}$ è pto angoloso

(ma non era necessario per risolvere l'esercizio)