Derivabilità di $f(x) = \sqrt{2\sin x - 1}$

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : 2\sin x - 1 \geq 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$$

f è periodica di periodo 2π $\Rightarrow$ basta studiarla su $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$
f è continua nel suo dominio.

f è sicuramente derivabile dove $2\sin x - 1 > 0$, cioè in $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\sin x - 1}}(2\cos x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x - 1}} \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right).$$

$x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$ sono di dubbia derivabilità.



$x = \frac{\pi}{6}$.

$$f'_+\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{6}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right) - 1}}{h} = \ldots = ?$$

Proviamo un altro metodo, che si basa sul seguente teorema.

Teorema Supponiamo f continua in $[x_0, b)$ $(a, x_0]$
derivabile in (x_0, b). (a, x_0)

Se $\exists \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$, allora $f'_+(x_0) = \ell$.

Se $\exists \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$ allora $f'_-(x_0) = \ell$.

Applicazione

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{6}\right)^+} f'(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{6}\right)^+} \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x - 1}} = +\infty$$

$\cos x \to \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{2\sin x - 1} \to 0^+$

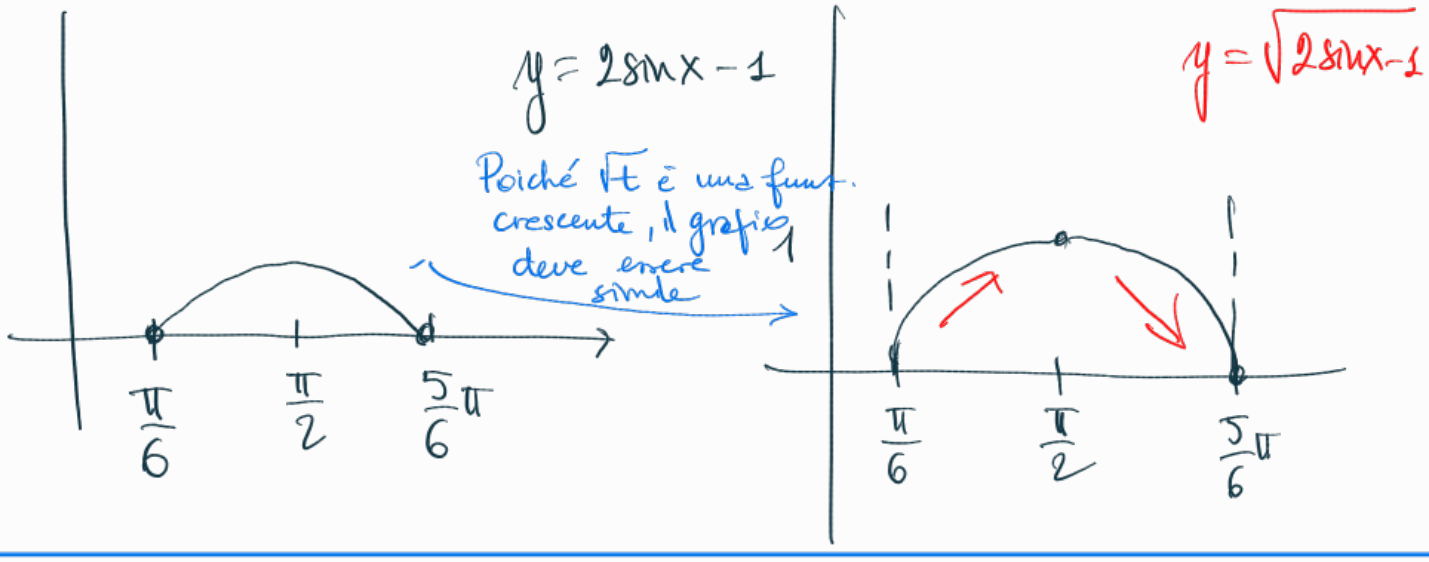
Teor $\Rightarrow$ $f'_+\left(\frac{\pi}{6}\right) = +\infty$

$x = \frac{\pi}{6}$ è pto di non derivabilità (tg. verticale)

In $x = \frac{5}{6}\pi$?

$$\lim_{x \to \left(\frac{5}{6}\pi\right)^-} f'(x) = \lim_{x \to \left(\frac{5}{6}\pi\right)^-} \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x - 1}} = -\infty.$$

($\cos x \to -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{2\sin x - 1} \to 0^+$)



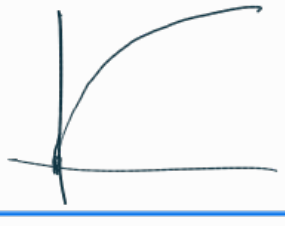
Questo metodo si applica anche alle situazioni già viste.

$f(x) = \sqrt{x}$ dominio: $[0, +\infty)$ f è continua in $[0, +\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\forall x > 0$.

Derivabilità in $x = 0$. Applico il teorema:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty \Rightarrow f'_+(0) = +\infty$$



$f(x) = x|x|$ dominio $= \mathbb{R}$, f continua in $\mathbb{R}$.

sicuramente derivabile per $x \neq 0$ $\quad f'(x) = \begin{cases} 2x & \forall x > 0 \\ -2x & \forall x < 0 \end{cases}$

Derivabilità in $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad f'_+(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (-2x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'_-(0) = 0$$

$\Rightarrow f'(0) = 0$ derivabile in $x = 0$

Altro esempio $\quad f(x) = x^{2/5}$ dominio: $\mathbb{R}$, continua in $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2}{5} x^{-3/5} = \frac{2}{5 x^{3/5}} \qquad \forall x \neq 0.$$

Derivabilità in $x = 0$.

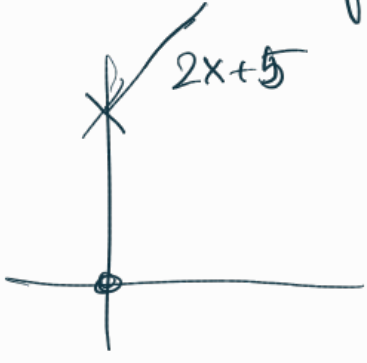
$$\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad f'_\pm(0) = \pm\infty \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ cuspide

OSS sul teorema:

1°) f deve continua in x_0, altrimenti il teorema è falso.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



N.B. non derivabile in $x = 0$ perché non è continua.

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2 = 2 \not\Rightarrow f'_+(0) = 2$$ No!

2°) deve esistere $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

dom $f = \mathbb{R}$, continua in $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \not\exists \quad \text{(thm. ponte)}$$

$2x\sin\frac{1}{x} \to 0$; $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ non $\exists$ lim.

$\Rightarrow \not\exists f'_+(0)$ FALSO perché

dobbiamo provare che $f'(0) = 0$ ☐

Esercizio d'esame.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+2x^2)}{x} & \text{se } x < 0 \\ \alpha x^4 + \beta \sin(2\pi x) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Trovare tutti i valori $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c.

a) f continua in $\mathbb{R}$
b) f derivabile in $\mathbb{R}$
c) — —
d) —

a) f è sicuramente continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

continuità in $x=0$? è ovviamente continua da dx.

Continuità da sx.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \overset{?}{=} f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1+2x^2)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2}{x} = 0$$

($\log(1+2x^2) \sim 2x^2$)

f è continua in $\mathbb{R}$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

---

b) per essere derivabile, f deve essere continua. Ma questo è sempre vero.

f è sicuramente derivabile per $x \neq 0$.

Per $x<0$ $\quad f'(x) = \left(\frac{\log(1+2x^2)}{x}\right)' =$

$$= \frac{\frac{4x}{1+2x^2}\,x - \log(1+2x^2)\cdot 1}{x^2} = \frac{4x^2 - \log(1+2x^2)(1+2x^2)}{x^2(1+2x^2)}$$

$$\left(\log(1+2x^2)\right)' = \frac{4x}{1+2x^2}$$

Per $x>0$ $\quad f'(x) = \left(\alpha x^4 + \beta \sin(2\pi x)\right)' =$

$$= 4\alpha x^3 + \beta 2\pi \cos(2\pi x)$$

Derivabilità in $x=0$

Ovviamente f è derivabile da dx in $x=0$.

$$f'_+(0) = \left(4\alpha x^3 + 2\pi\beta \cos(2\pi x)\right)\Big|_{x=0} = 2\pi\beta$$

Per $f'_-(0)$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{4x^2 - (1+2x^2)\log(1+2x^2)}{x^2(1+2x^2)} = 2$$

($4x^2 - (1+2x^2)\log(1+2x^2) \sim 2x^2$; $x^2(1+2x^2) \sim x^2$)

$$4x^2 - (1+2x^2)\log(1+2x^2) =$$

oss $\log(1+2x^2) = 2x^2 + o(x^2)$

$$= 4x^2 - (1+2x^2)(2x^2 + o(x^2)) =$$

$$= 4x^2 - 2x^2 + o(x^2) \underbrace{-4x^4}_{o(x^2)} \underbrace{- 2x^2 o(x^2)}_{o(x^2)} =$$

$$= 2x^2 + o(x^2) \sim 2x^2$$

$$\Rightarrow f'_-(0) = 2$$

f derivabile in $0 \iff f'_-(0) = f'_+(0)$

$$2 = 2\pi\beta$$

$$\boxed{\beta = \frac{1}{\pi}} \quad \boxed{\alpha \text{ qualsiasi}}$$

Per calcolare $f'_-(0)$ potevo anche fare il calcolo diretto

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\left(\frac{\log(1+2h^2)}{h}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\log(1+2h^2)}{h^2} = 2. \quad \text{(più facile!)}$$

($\log(1+2h^2) \sim 2h^2$)

TEOREMA (derivata della funzione inversa).

Siano I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua e strett. monotòna

(quindi $\operatorname{im} f = J$ intervallo, $f: I \to J$ biettiva,

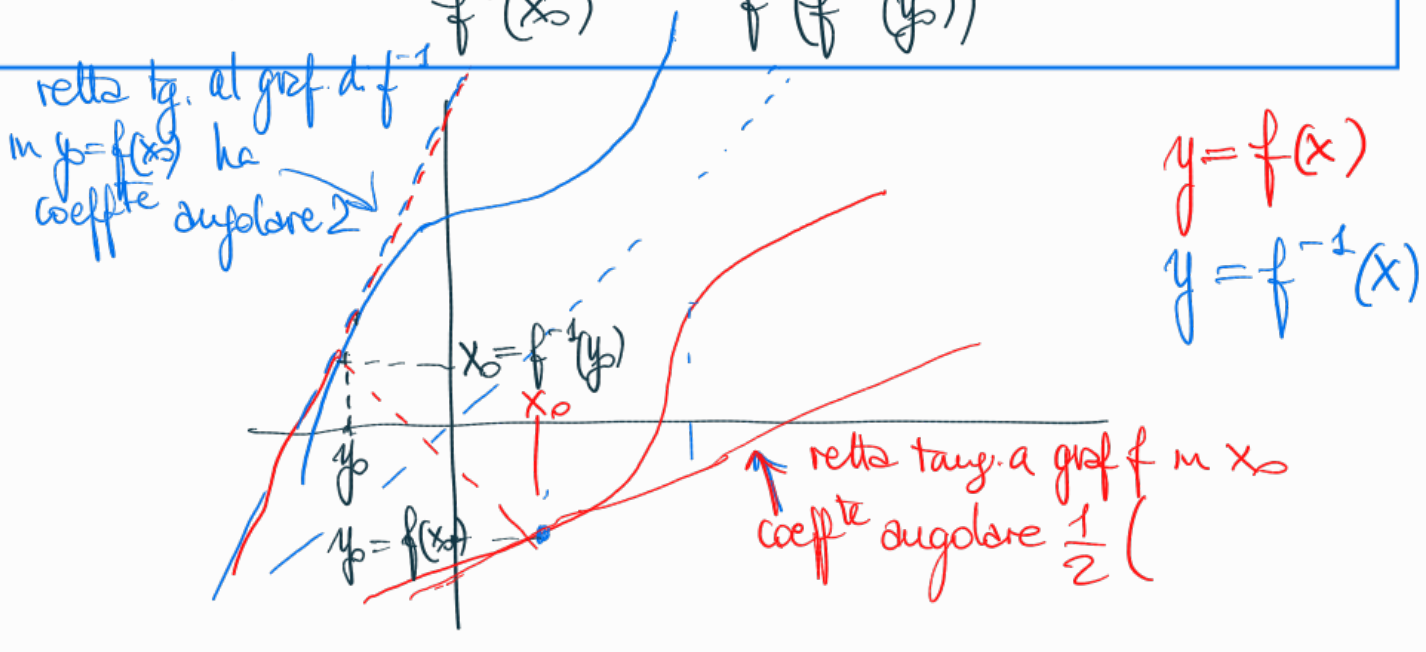
$\exists\, f^{-1}: J \to I$ continua e strett. monotòna)

Se f è derivabile in $x_0 \in I$, e $f'(x_0) \neq 0$,

allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, e si ha.

($y_0 = f(x_0) \iff x_0 = f^{-1}(y_0)$)

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$



$f(x) = 1 + 2x + x^5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strett. crescente, continua, biiettiva.

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma non so scriverne l'espressione

$f'(x) = 2 + 5x^4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f^{-1}(y)$ è derivabile $\forall y \in \mathbb{R}$, e si ha

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2+5x^4} = \frac{1}{2+5(f^{-1}(y))^4}$$

dove $x = f^{-1}(y)$

e mi fermo qui perché non so scrivere f^{-1}.

La formula per la derivata non è esplicita però posso calcolarla in alcuni punti. Per es.

$f(0) = 1$. Il teorema dice che

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2+5x^4}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

$f(1) = 4$.

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2+5x^4}\Big|_{x=1} = \frac{1}{7}$$

$f(x) = x^2 : (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$

continua, strett. crescente, biettiva.

$f'(x) = 2x > 0 \qquad \forall x \in (0,+\infty)$

$f^{-1}(y) : (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$

$y \longmapsto f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \forall y > 0$$

dove $y = f(x) = x^2$

cioè $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$f(x) = e^x : \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$ strett. crescente, derivabile, biettiva.

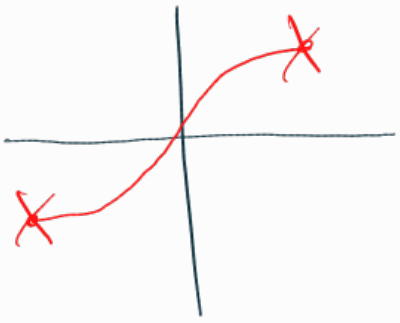
$f^{-1}(y) = \log y : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$f'(x) = e^x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$(f^{-1})'(y) = \underbrace{(\log y)' = \frac{1}{e^x}}_{\text{dove } y = e^x,\ x = \log y} = \frac{1}{y}$$

$$f(x) = \sin x \Big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$$

derivabile, strett. crescente, biiettiva



$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \arcsin y : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x \neq 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = y \in (-1,1)$$

$$(f^{-1})'(y) = (\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x} = (*)$$

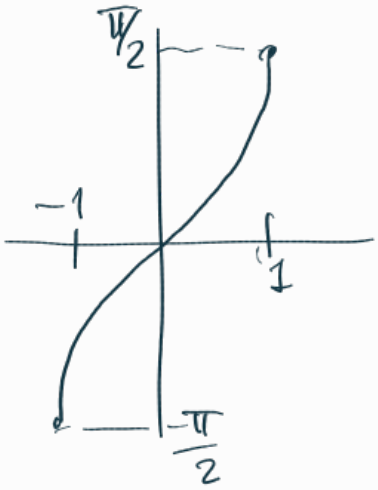
dove $y = \sin x$, cioè $x = \arcsin y$

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ dove $\cos x > 0$ $\Rightarrow$ scelgo il segno +

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1,1)}$$



$y = \arcsin x$

OSS | pti

$x = 1$ e $x = -1$

Sono pti d tg vert.

$f(x) = \cos x \Big|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$ strett. decresc. biiettiva

$f^{-1}(y) = \arccos y : [-1,1] \to [0,\pi]$

$f'(x) = -\sin x < 0 \qquad \forall x \in (0,\pi)$

$\Downarrow$

$y = \cos x \in (-1,1)$

$$(f^{-1})'(y) = (\arccos y)' = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{\sin x} = (*)$$

dove $y = \cos x$

$x = \arccos y$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} \\ x \in (0,\pi) \end{array} \;\middle|\; \Rightarrow \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} \right]$$

$$(*) = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in (-1,1)$$