Algebra delle derivate (2ª parte)

Premessa: $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabili in $x_0 \in X$.

Allora

1) $$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

1') $$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2) $$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

3) Se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{1}{g(x)}$ è derivabile in x_0

$g(x_0) \neq 0$, g continua perché derivabile $\Rightarrow g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0

e

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Esempio

$$\left(\frac{1}{x^3 - 3x}\right)' = -\frac{3x^2 - 3}{(x^3 - 3x)^2} \qquad \forall x \neq 0, \pm\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \qquad \forall x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Dim

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h\, g(x_0+h)\, g(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \qquad \square$$

($\to -g'(x_0)$; $\to g(x_0)$ perché g è continua in x_0)

4) Se $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in x_0, e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Esempi

$$\left(\frac{5x-2}{x^2-1}\right)' = \frac{5(x^2-1) - (5x-2)\,2x}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{5x^2 - 5 - 10x^2 + 4x}{(x^2-1)^2} = \frac{-5x^2+4x-5}{(x^2-1)^2} \qquad \forall x \neq \pm 1$$

$$D(\operatorname{tg} x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \operatorname{tg}^2 x \end{cases} \qquad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \qquad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dots = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$$

$$\forall x \neq k\pi$$

Dm (4)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \text{(derivata del prodotto)}$$

$$= f'(x_0)\,\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) =$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)} =$$

$$= \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)} \qquad \square$$

TEOREMA (derivata della funzione composta, chain rule, regola della catena)

Siano $g: X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$, $f: Y \to \mathbb{R}$ | (Questo implica che esiste $f \circ g: X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(g(x))$)

Se g è derivabile in $x_0 \in X$, e f è derivabile in $g(x_0)$, la funzione composta $f \circ g$ è derivabile in x_0, e

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$$

Esempi

$$(\sin(x^3))' = \cos(x^3)\, 3x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$((\sin x)^3)' = 3(\sin x)^2 \cos x = 3\sin^2 x \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\log|x|)' = \begin{cases} (\log x)' & \text{se } x > 0 \\ (\log(-x))' & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \forall x \neq 0$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{(-x)}(-1) & \text{se } x < 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{x}$$

Più sinteticamente $(\log|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot (|x|)' = \frac{x}{|x|^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

($(|x|)' = \frac{x}{|x|}$)

$$\left(\text{tg}\,(3x-5)\right)' = \frac{3}{\cos^2(3x-5)}$$

<u>oss</u> $\left(f(ax+b)\right)' = f'(ax+b)\,a$

$$\left(\cos(4x+2)\right)' = -4\sin(4x+2)$$

<u>Dim teorema</u> con l'ipotesi aggiuntiva che g sia strett. monotòna in un intorno di x_0.

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = (*)$$

$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \to g'(x_0)$

$g(x_0+h) - g(x_0) \neq 0$ perché ho supposto g strett. monotòna

$g(x_0+h) = y \xrightarrow[h\to 0]{} g(x_0)$ perché g è continua in x_0

$\frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)}$ $\quad y \to g(x_0)$

$\downarrow\ h\to 0\ (y\to g(x_0))$

$f'(g(x_0))$

$$(*) = f'(g(x_0))\,g'(x_0)$$ □

Il caso generale è poco più complicato → vedi testo.

$$(x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}(x\log x)' =$$

$$= x^x\left(\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1) \qquad \forall x>0$$

Tutte le funzioni ottenuti da funzioni derivabili mediante le 4 operazioni e composizioni sono derivabili nel loro dominio, per es.

$$f(x) = \frac{\log(x^4+3x^2+7)\sin(e^x)}{x^2 + \left(\operatorname{tg}\left(\frac{3}{1+x^2}\right)\right)^3}$$

è derivabile nel suo dominio

Studio della derivabilità nei casi dubbi.

Esempio: $f(x) = \sqrt{|x|}$

dominio: $\mathbb{R}$

f è continua in $\mathbb{R}$

Pb. di derivabilità in $x=0$.

f derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Se $x>0$, $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

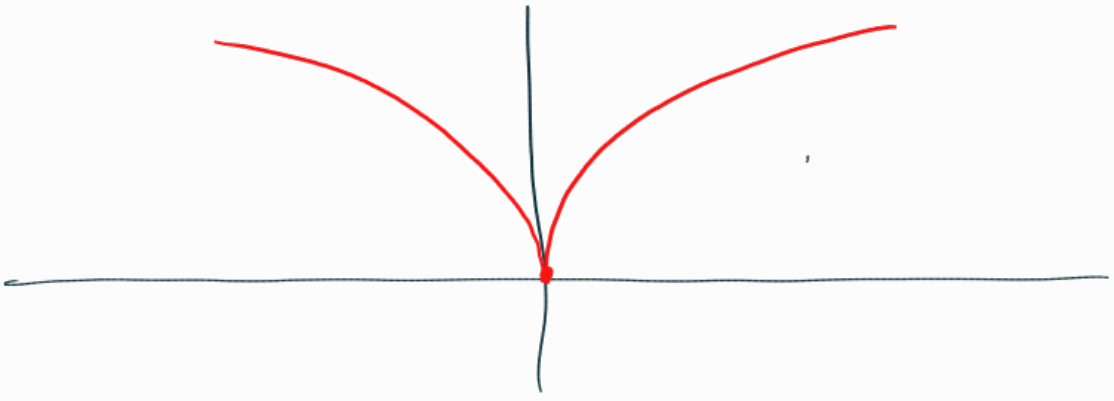
se $x<0$, $f'(x) = (\sqrt{-x})' = \frac{1}{2}(-x)^{-1/2}(-1) = -\frac{1}{2\sqrt{-x}}$

$x=0$. Controllo con limite del rapporto incrementale.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|h|}}{h} \quad \nexists$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty = f'_+(0)$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{-h}}{h} = \lim_{\substack{k\to 0^+ \\ k=-h\to 0^+}} \frac{\sqrt{k}}{-k} = -\infty = f'_-(0)$$



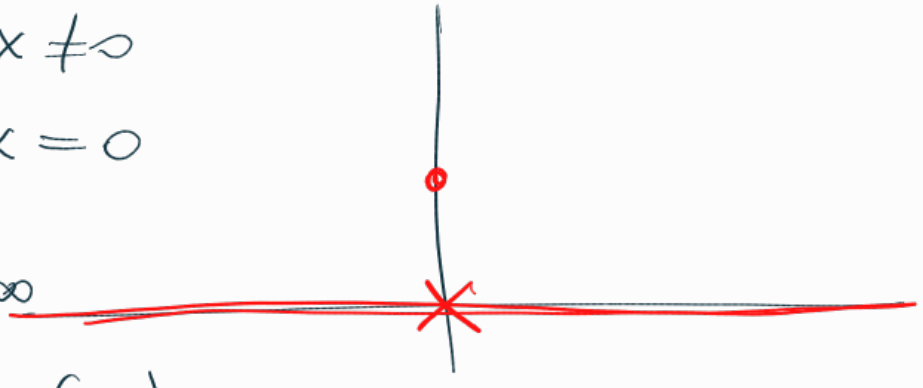
DEF $(x_0, f(x_0))$ si dice **pto di cuspide** del grafico di f se:

1) f è continua in x_0;

2) $f'_+(x_0) = +\infty$, $f'_-(x_0) = -\infty$ oppure viceversa

OSS si deve richiedere f continua in x_0 altrimenti

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$f'_+(0) = -\infty$, $f'_-(0) = +\infty$

avrebbe una cuspide in $(0,1)$.

Altro esempio:

$f(x) = x^{2/5}$ dominio: $\mathbb{R}$

continua in $\mathbb{R}$

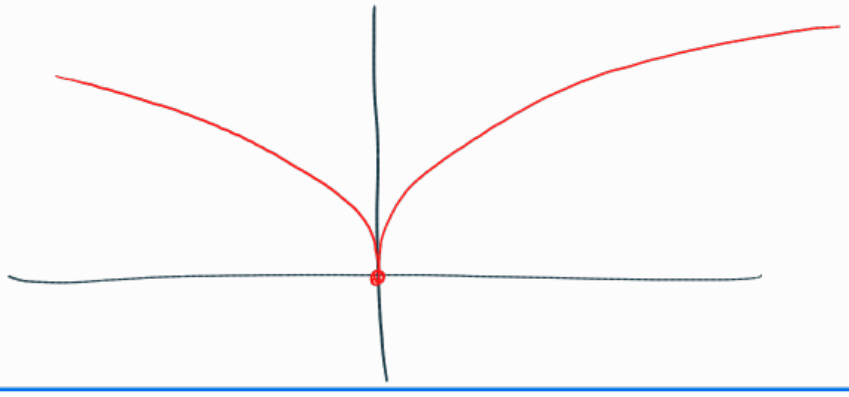
$$f'(x) = \frac{2}{5} x^{-3/5} = \frac{2}{5 x^{3/5}} \quad \forall x \neq 0.$$

$x = 0$?

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^{2/5}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h^{3/5}} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \dots = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h^{3/5}} = -\infty$$

Cuspide in $x = 0$.



$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

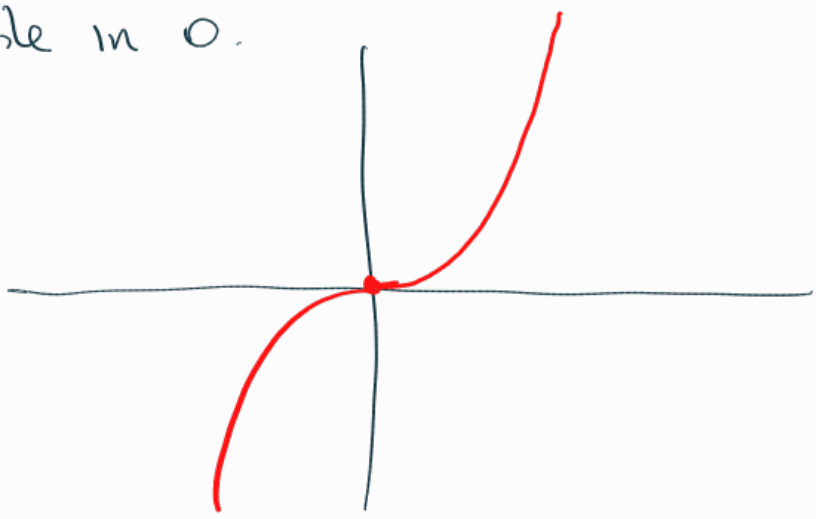
dominio: $\mathbb{R}$, f continua in $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$x = 0$?

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h|h|}{h} = 0$$

$\Rightarrow$ f derivabile in 0.



$f(x) = x|x|$ derivabile in $\mathbb{R}$, e

$$\boxed{(x|x|)' = 2|x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Riassunto dei principali punti di continuità in cui f non è derivabile.

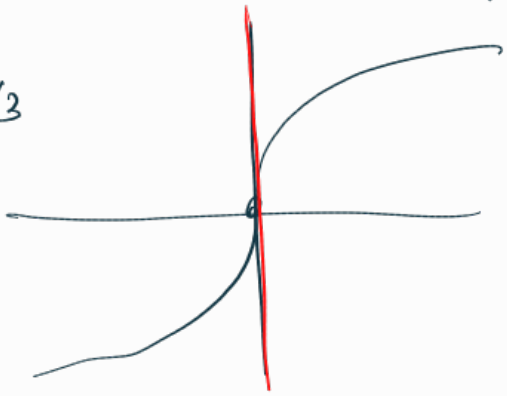
In tutti questi casi f deve essere continua in x_0

1) Pti a tang. verticale.
Sono quelli per cui

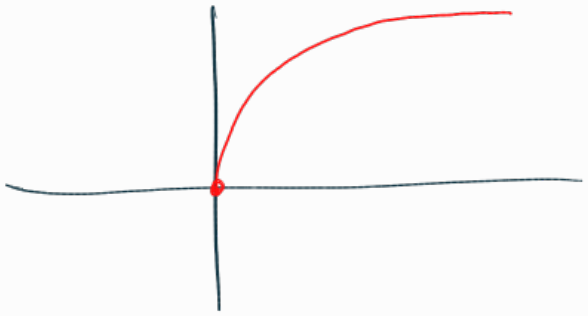
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty \quad \text{opp. } -\infty$$

Esempi: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

Pto a tg. verticale in $(0,0)$



oppure $f(x) = \sqrt{x}$ in $x = 0$.

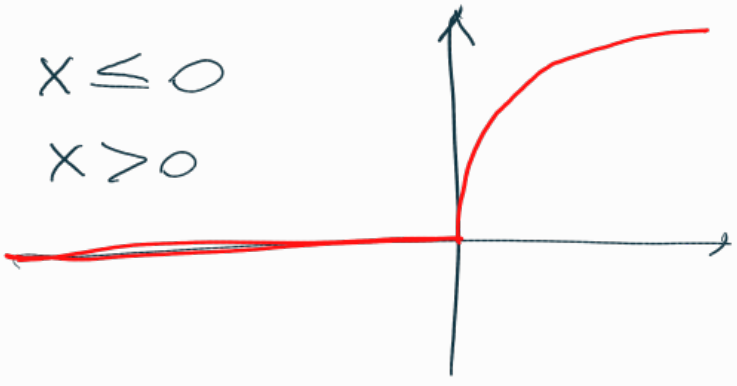


2) Pti angolosi:

$\exists f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, e almeno uno dei due è finito.

Esempi $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



$f'_+(0) = +\infty$

$f'_-(0) = 0$

3) cuspidi.

$\exists f'_+(x_0) = +\infty$

$\exists f'_-(x_0) = -\infty$

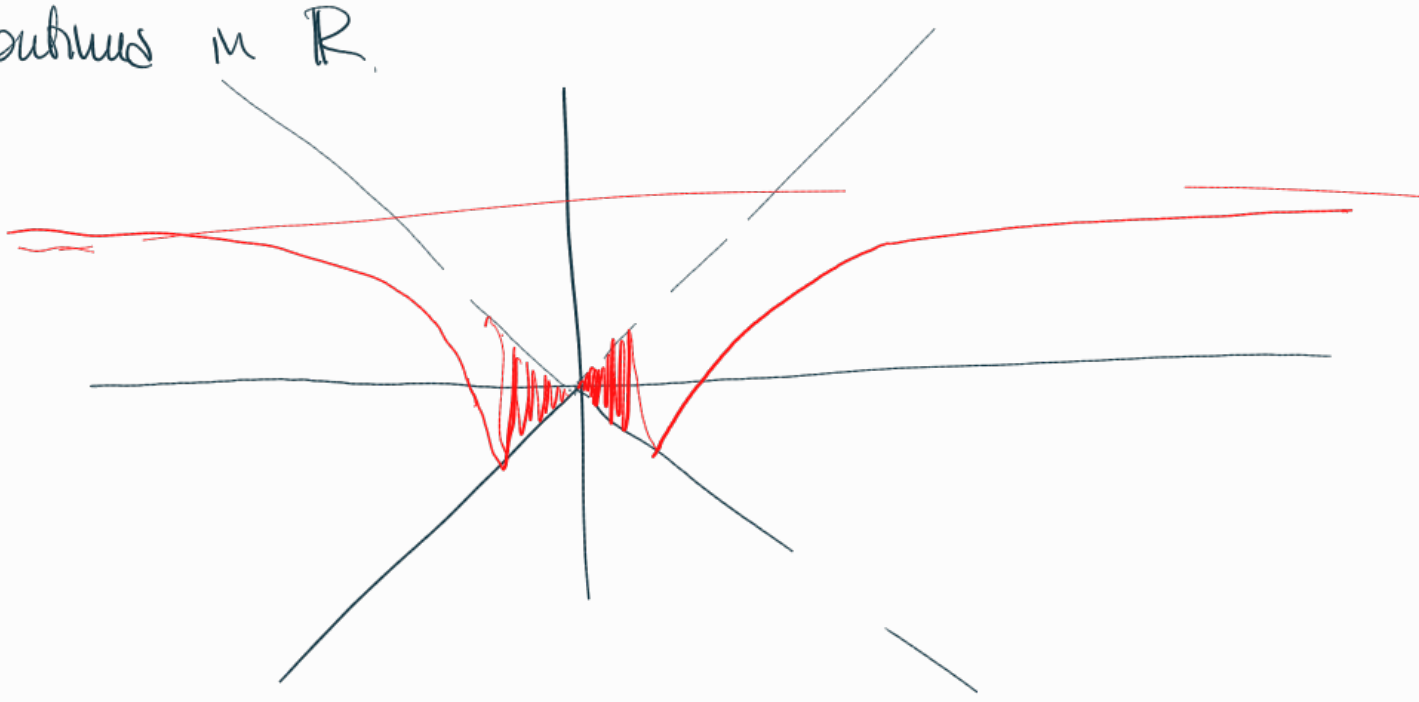
o viceversa



Questa classificazione non esaurisce tutte le possibilità

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

continua in $\mathbb{R}$.



$$f'(x) = \left(x \sin \frac{1}{x}\right)' = \qquad \text{se } x \neq 0$$

$$= \sin \frac{1}{x} + x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

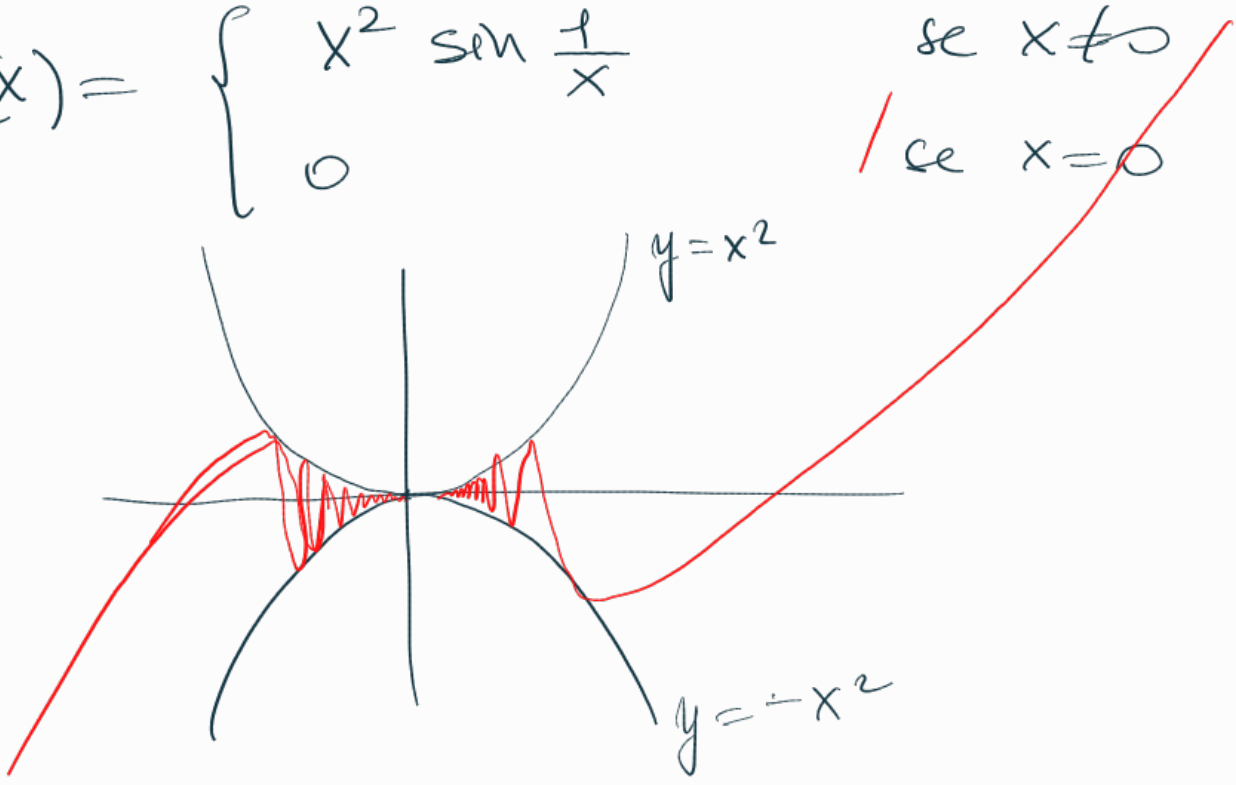
$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{h}\right) \quad \nexists$$

$$f'_-(0) \nexists$$

Questo esempio di funzione continua in 0 ma non derivabile non rientra nelle tipologie precedenti

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



f è continua in $\mathbb{R}$ (facile)

f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \qquad \text{se } x \neq 0$$

$$= 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$f'(0)$? $f'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} = 0$

f è derivabile in $\mathbb{R}$!

$$f(x) = \sqrt{2\sin x - 1}$$



dominio $= \{x \in \mathbb{R} : \sin x \geq \frac{1}{2}\} =$

$$= \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right] \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

f continua nel suo dominio, periodica di periodo 2π

$\Rightarrow$ basta studiarla in $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$.

Pb. di derivabilità in $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$.