DEF Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 punto non isolato di X. f si dice **derivabile** in x_0 se esiste finito il limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \Big| \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$h = x - x_0 \to 0$

$x = x_0 + h$

In tal caso il numero $f'(x_0)$ si dice **derivata** di f in x_0.

Si definisce **retta tangente** al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$, se esiste, una retta della forma $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ verificante

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

Supponiamo $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

$\Downarrow$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-m\right]=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=m$$

$$\Updownarrow$$

$$f'(x_0)=m.$$

Abbiamo provato che:

PROP

f è derivabile in $x_0 \iff$ esiste la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

e in tal caso si ha: $m = f'(x_0)$

↑ coeff^te angolare della retta tg.

Eq^ne della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

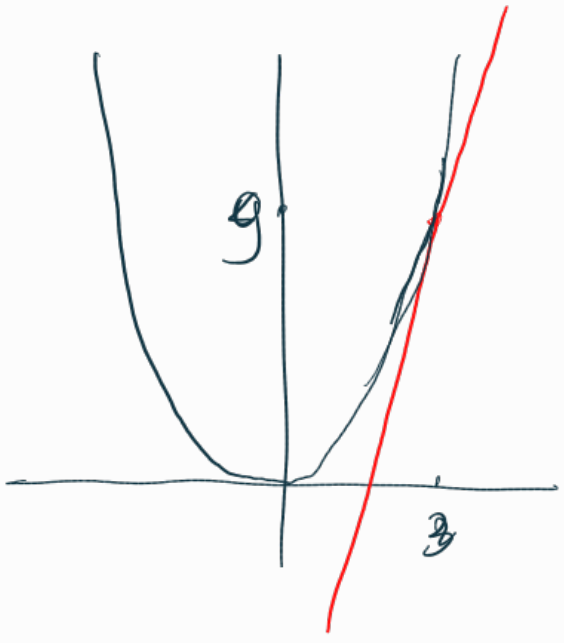
La proprietà di tangenza diventa:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad \text{per } x\to x_0$$

Esempio: trovare la retta tg al grafico di $f(x)=x^2$ nel pto di ascissa 3

$$y = f(3) + f'(3)(x-3) = 9 + 6(x-3)$$

$f(3) = 9$, $f'(3) = 6$



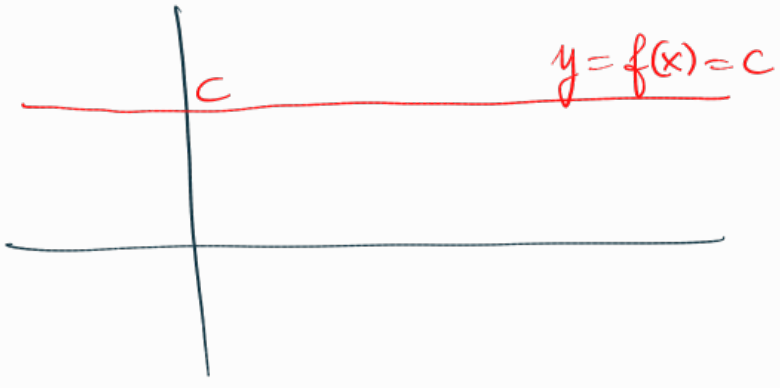
Derivate delle funzioni elementari:

1) Derivata di una costante: se $f(x) \equiv c \in \mathbb{R}$

$$(c)' = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$$

($f(x+h) = c$, $f(x) = c$)

$$\boxed{(c)' = 0}$$



2) $f(x) = ax + b$

$$(ax+b)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}$$

($a(x+h)+b-(ax+b) = ah$)

$$= a.$$

$$(ax+b)' = a \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

OSS se $f: X \to \mathbb{R}$ è derivabile in tutti i punti di X la sua derivata in tutti i punti individua una funzione, la funzione derivata di f.

$$\begin{array}{rccc} f' : & X & \to & \mathbb{R} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

3) $f(x) = x^2$

$$(x^2)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$$

4) $(x^k)'$ $\qquad k \in \mathbb{N}$

$$(x^k)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^k - x^k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^k\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^k - 1\right]}{h} =$$

($\sim \frac{kh}{x}$)

$$\left[(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t \text{ per } t\to 0 \qquad \alpha = k,\ t = \frac{h}{x} \to 0\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^k \frac{kh}{x}}{h} = kx^{k-1}$$

$\forall x \neq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$

(Per $x = 0$ il conto è banale)

$(x^5)' = 5x^4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{(x^k)' = kx^{k-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N}}$$

Rifacendo i calcoli allo stesso modo, si ottiene

5) $$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x > 0}$$

Questa formula, se $\alpha \in \mathbb{Q}$, vale anche per tutti gli x per cui la formula ha senso.

Per esempio:

$$\boxed{(x^{4/3})' = \frac{4}{3} x^{1/3} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

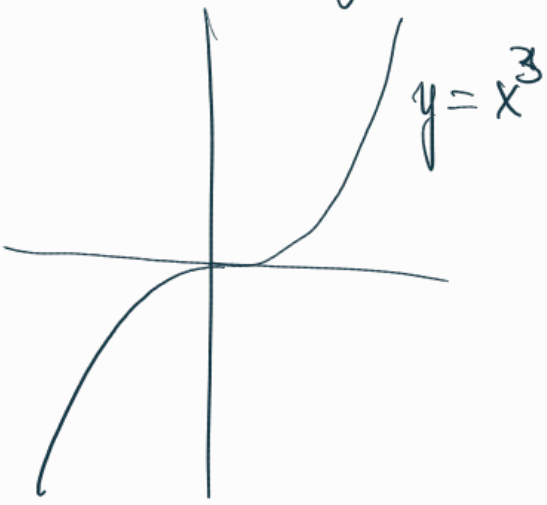
$$(x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

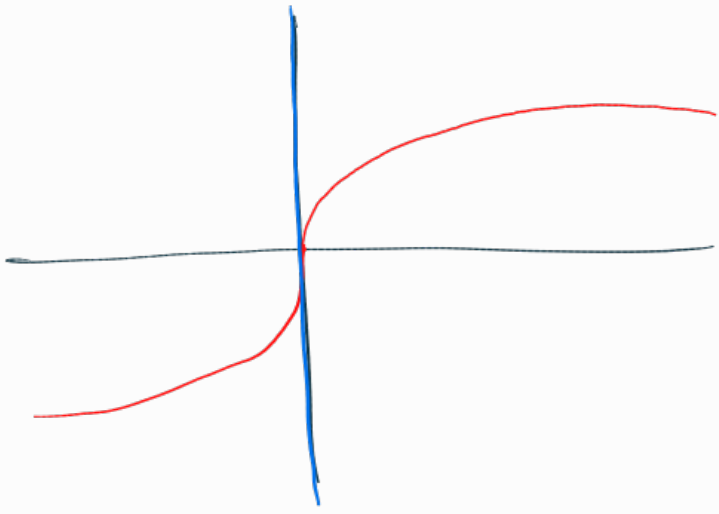
e in $x=0$?

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$$

($h^{1/3} = f(h)$, $0 = f(0)$; $h^{2/3} \to 0^+$)

Quindi $f(x) = x^{1/3}$ non è derivabile in $x=0$.
La sua tangente in $(0,0)$ è verticale.





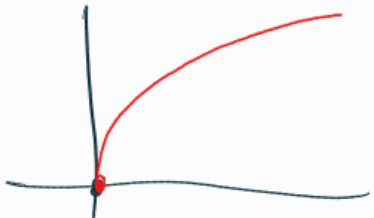
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1}) = -1\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \qquad \forall x \neq 0$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \forall x > 0$$

Per $x=0$?

$$f'(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$



6) $(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{(e^h-1)}{h} = e^x$

$\frac{(e^h-1)}{h} \to 1$

$$\boxed{(e^x)' = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$(2^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{2^{x+h}-2^x}{h} = \lim_{h\to 0} 2^x \frac{(2^h-1)}{h} =$

$= (\log 2)\, 2^x$

$\frac{(2^h-1)}{h} = \frac{e^{h\log 2}-1}{h} \to \log 2$

e in generale

$$\boxed{(a^x)' = (\log a)\, a^x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall a > 0}$$

---

7) $(\log x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0$

$\log\left(1+\frac{h}{x}\right) \sim \frac{h}{x}$

$\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$ con $t = \frac{h}{x} \to 0$

$$\boxed{(\log x)' = \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0}$$

$$\boxed{(\log_b x)' = \dots = \lim_{h\to 0} \frac{\log_b\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} =}$$

$$\boxed{= \lim_{h\to 0} \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\log b \; h} = \frac{1}{x \log b} = \frac{\log_b e}{x} \qquad \forall b>0, b\neq 1 \quad \forall x>0}$$

8) $(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} =$

$\left[\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \quad \text{(prostaferesi)}\right]$

$\to \cos x$ per la continuità di $\cos x$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right) = \cos x$

$\to \frac{h}{2}$

$\sin \frac{h}{2} \sim \frac{h}{2}$ per $h \to 0$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

8') $$(\cos x)' = -\sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(dim. simile oppure usare $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$)

TEOREMA f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

In particolare se f non è continua in $x_0 \Rightarrow f$ non è derivabile in x_0

e $A \Rightarrow B$, allora $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

Dim teorema. Supponiamo f derivabile in x_0.

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0) = 0$$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0) \in \mathbb{R}$

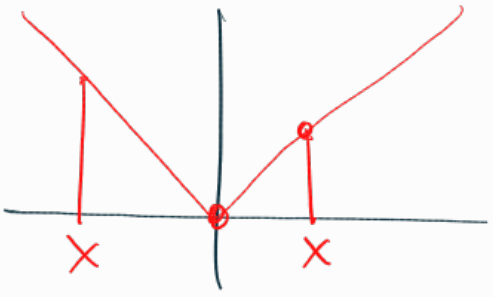
$(x-x_0) \to 0$

□

Vale il viceversa? f continua in $x_0 \overset{?}{\Longrightarrow} f$ derivabile in x_0?

No, per es. 1) $f(x) = x^{1/3}$ è continua in $x=0$, ma non derivabile in $x=0$ (visto prima).

Idem per 2) $f(x) = x^{1/2}$



3) $f(x) = |x|$ continua in $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

In $x=0$? $\lim_{h\to 0} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \nexists$.

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} \overset{=h}{=} 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} \overset{=-h}{=} -1$$

DEF Se x_0 è un punto in cui f è continua e

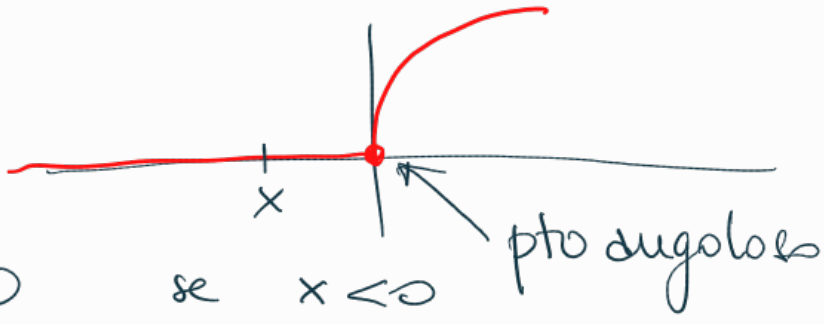
$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ derivata destra di f in x_0

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \quad "$$ derivata sinistra " "

esistono entrambe, sono diverse tra loro e almeno una delle due è finita,

diremo che $(x_0, f(x_0))$ è un <u>punto angoloso</u> del grafico di f.

Per es. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$



$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

In $x = 0$? $\quad f'_-(0) = 0, \quad f'_+(0) = +\infty.$

$$(|x|)' = \begin{cases} \frac{x}{|x|} = \operatorname{sign} x & \text{se } x \neq 0 \\ \nexists \text{ (pto angoloso)} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$D(x^{4/3}) = \frac{4}{3} x^{1/3}$

$D(x^2) = 2x$

$D(x^3) = 3x^2$

$D(\sin x) = \cos x$

$D(\cos x) = -\sin x$

$D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

<u>congettura:</u>

la derivata di una funzione pari è una f. dispari

la derivata di una funzione dispari è una f. pari.

TEOREMA

1) Se f è derivabile e dispari $\Rightarrow$ f' è pari

2) se " " " " pari $\Rightarrow$ f' è dispari.

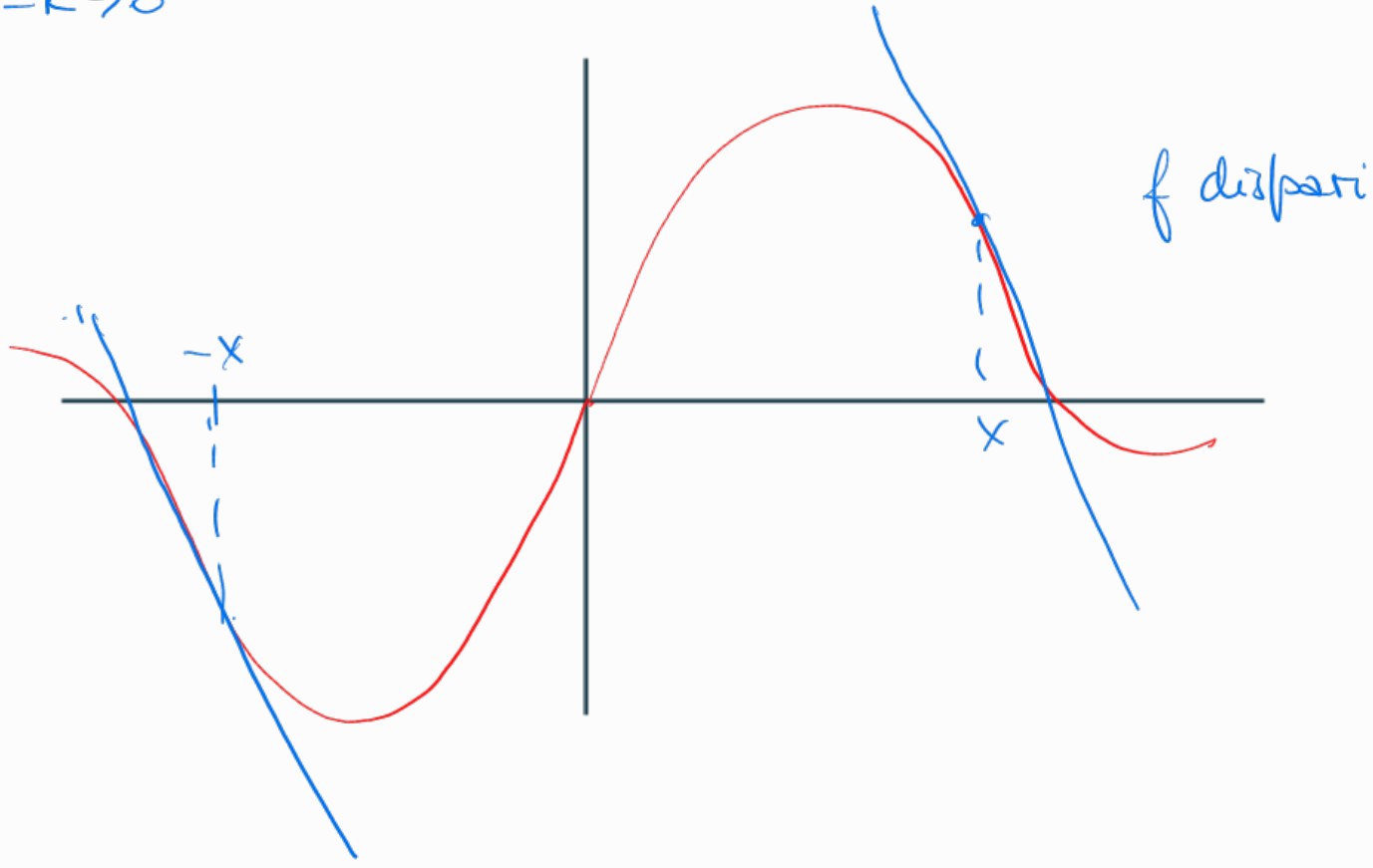
Dim 1) Supp. f dispari.

$$f'(-x) \overset{?}{=} f'(x) \qquad \forall x \in \text{dom } f.$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} \overset{f \text{ dispari}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{-f(x-h)+f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{-f(x+k)+f(x)}{-k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x+k)-f(x)}{k} = f'(x)$$

$-h = k \to 0$



Algebra delle derivate.

Siano $f, g: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f e g sono derivabili in $x_0 \in X$, allora:

1) $f+g$ è derivabile in x_0, e

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Dim. $(f+g)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x_0+h)+g(x_0+h)) - (f(x_0)+g(x_0))}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \right] = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to f'(x_0)$ $\qquad$ $\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \to g'(x_0)$

1') $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ è derivabile in x_0, e si ha

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$ (linearità della derivata)

2) Il prodotto fg è derivabile in x_0, e si ha:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

Esempio $(x^3 \cos x)' = 3x^2 \cos x + x^3(-\sin x) =$

$$= 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

Dim

$$(fg)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[g(x_0+h) \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + f(x_0) \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \right] =$$

$g(x_0+h) \to g(x_0)$ perché g è continua in x_0 (essendo derivabile)

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to f'(x_0)$

$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \to g'(x_0)$

$$= f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0) \qquad \square$$