Trovare $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ t.c.

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + b & \text{se } x \le 2 \\ \dfrac{\sin(4x-8)}{2b - bx} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$2b - bx = b(2-x)$

sia continua.

Se $x_0 > 2$, in un intorno di $x_0$ la funzione vale $\dfrac{\sin(4x-8)}{b(2-x)}$,

quindi $f$ è continua in $x_0$.

Se $x_0 < 2$, in un intorno di $x_0$ $f$ vale $2^x + b$,

quindi $f$ è continua in $x_0$

In $x_0 = 2$? Sicuramente $f$ è continua da sinistra,

cioè $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2^x + b) = 2^2 + b = f(2)$.

$4x - 8 = 4(x-2)$

Limite da destra

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sin(4x-8)}{b(2-x)} = -\frac{4}{b} \overset{?}{=} 4 + b$$

$4x-8 \to 0$ per $x \to 2^+$; $\sin t \sim t$ per $t \to 0$

$f$ è continua (da destra) in $x = 2 \iff -\dfrac{4}{b} = 4 + b$

$$b^2 + 4b + 4 = 0 \iff (b+2)^2 = 0 \iff b = -2.$$

$f$ continua $\iff b = -2$.

Trovare il dominio di $f(x) = (2\sin^2 x)^{\frac{1}{\cos(2x)}}$

e dire se è estendibile con continuità nei punti in cui non è definita

La base $2\sin^2 x$ è sempre $\geq 0$.

Quando $2\sin^2 x = 0$, cioè $x = k\pi$, l'esponente vale $\frac{1}{\cos(2k\pi)} = 1$, quindi la potenza si può sempre fare

Unico problema: $\cos(2x) \neq 0 \iff 2x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$$\iff x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Dominio $= \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

L'esercizio chiede se è possibile definire $f$ anche in $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ in modo che risulti continua in tali punti.

Periodicità: $2\sin^2 x$ ha periodo $\pi$ | $\frac{1}{\cos(2x)}$ " " " | $\Rightarrow f$ ha periodo $\pi$

Inoltre $f$ è pari.. $\Rightarrow$ Basta rispondere alla domanda in $x_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ poiché $x_0 = -\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$ per periodicità tutti gli $x_0 = (2k+1)\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (2\sin^2 x)^{\frac{1}{\cos(2x)}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (2\sin^2 x)^{\frac{1}{1-2\sin^2 x}} =$$

($2\sin^2 x \to 1$, $\frac{1}{\cos(2x)} \to \pm\infty$)

$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

$2\sin^2 x = y \to 1$

$$= \lim_{y\to 1} y^{\frac{1}{1-y}} = \lim_{y\to 1} e^{\frac{1}{1-y}\log y} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{y\to 1} \frac{\log(y+1-1)}{1-y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y\to 1} \frac{\log(1+(y-1))}{1-y} = -1$$

($y-1 \sim y-1$, $y-1 \to 0$)

$\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$

Se definiamo $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4} \\ e^{-1} & \text{per } x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \end{cases}$

$\tilde{f}$ risulta continua in $\mathbb{R}$.

(negli altri punti è ovvio).

---

## Discontinuità di una f. monotòna.

Sia $f$ monotòna in un intervallo $I$ (diciamo crescente)
Che tipo di discontinuità può avere.

**TEOREMA** Sia $f$ crescente in $I$ intervallo.
Allora $f$ può ammettere solo discontinuità di salto
(oppure discontinuità eliminabili agli estremi dell'intervallo).

Dim. Sia $x_0$ interno all'intervallo (non è uno degli estremi dell'intervallo.)

$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, e poiché $f(x) \leq f(x_0) \ \forall x < x_0$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0)$ ($\in \mathbb{R}$)

Analogamente $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \geq f(x_0)$

$\exists \in \mathbb{R}$

Quindi $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

$\exists \in \mathbb{R}$ $\exists \in \mathbb{R}$

Se i due limiti per $x \to x_0^{\pm}$ sono uguali $\Rightarrow x_0$ pto di continuità

oppure sono diversi $\Rightarrow x_0$ è pto di salto.

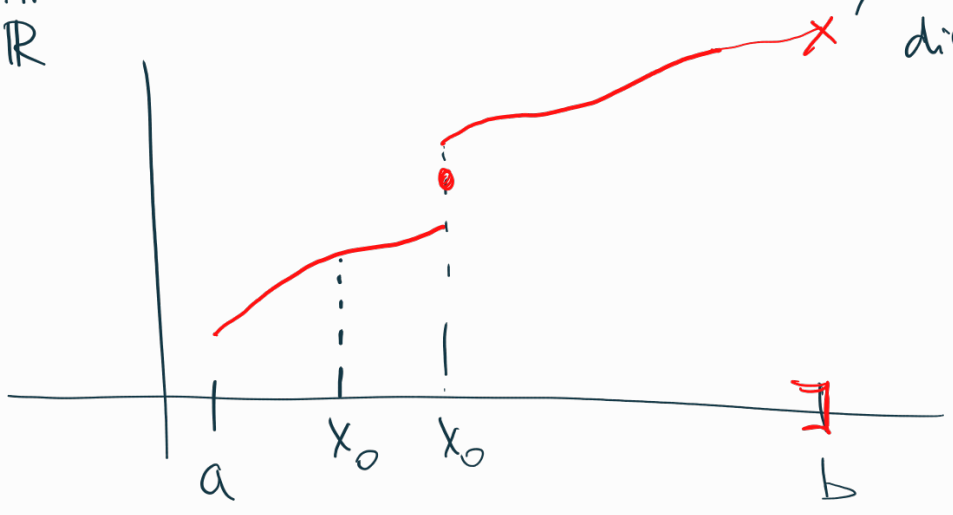
Cosa succede in un estremo, per esempio se $I = (a, b]$

Allora cosa succede in b?

$\exists \lim_{x \to b^-} f(x) \leq f(b)$ $\exists \in \mathbb{R}$

→ se vale "=", b è pto di continuità

→ se vale "<", b è pto di discont. eliminabile




---

Sia f una funzione continua e iniettiva.

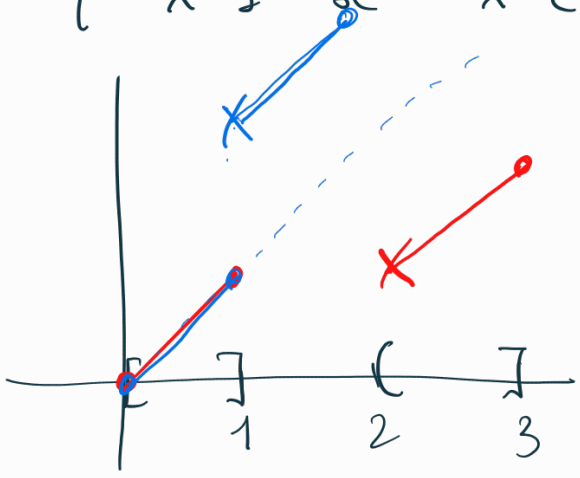
Allora f si può rendere biiettiva restringendo il codominio all'immagine. Resta definita $f^{-1}$ (inversa).

$f^{-1}$ è continua?

In generale la risposta è no, non sempre.

$f: [0,1] \cup (2,3] \longrightarrow [0,2]$ biettiva e continua.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [0,1] \\ x-1 & \text{se} \quad x \in (2,3] \end{cases}$$




$y = f(x)$

$y = f^{-1}(x)$

$\Rightarrow \exists \; f^{-1}(x): [0,2] \longrightarrow [0,1] \cup (2,3]$.

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [0,1] \\ 1+x & \text{se} \quad x \in (1,2] \end{cases}$$

$\Rightarrow f^{-1}$ ha un salto in $x_0 = 1$.

Tuttavia si ha:

**TEOREMA** Sia $f$ continua e iniettiva in $I$ intervallo ($\Rightarrow f$ strett. monotòna in $I$). Allora la sua inversa $f^{-1}$ (definita su $\text{im}(f)$, che è un intervallo) è continua (dim $\longrightarrow$ vedi libro di testo)

Applicazione: le funzioni trigonometriche inverse

$\arcsin x$ (funzione inversa di $\sin x\Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$)

$\arccos x$ ( inversa di $\cos x|_{[0,\pi]}$ )

$\arctg x$ ( inversa di $\operatorname{tg} x|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ )

sono continue nel loro dominio.
(dim. è sul libro di testo).

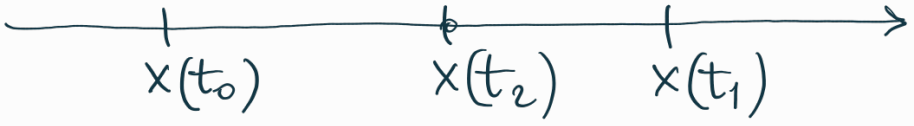
---

## DERIVATE

1) Concetto "cinematico" di derivata (fisica).

Sia $x(t)$ la posizione all'istante $t$ di un punto materiale che si muove lungo una guida rettilinea.

$t_0 < t_1 < t_2$




Fissati $t_0 < t_1$, considero la velocità media del pto materiale nell'intervallo $[t_0, t_1]$

$$\bar{v}(t_0, t_1) = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$

distanza percorsa

Esempio $t_0 = 0$ sec. $\quad t_1 = 60$ sec.
$x(t_0) = 0$ m $\quad x(t_1) = 900$ m.

$$\bar{v}(t_0, t_1) = \frac{(900 - 0)\,m}{(60 - 0)\,s} = 15\ \frac{m}{s}$$

Se voglio una misurazione più precisa della velocità devo prendere intervalli sempre più piccoli

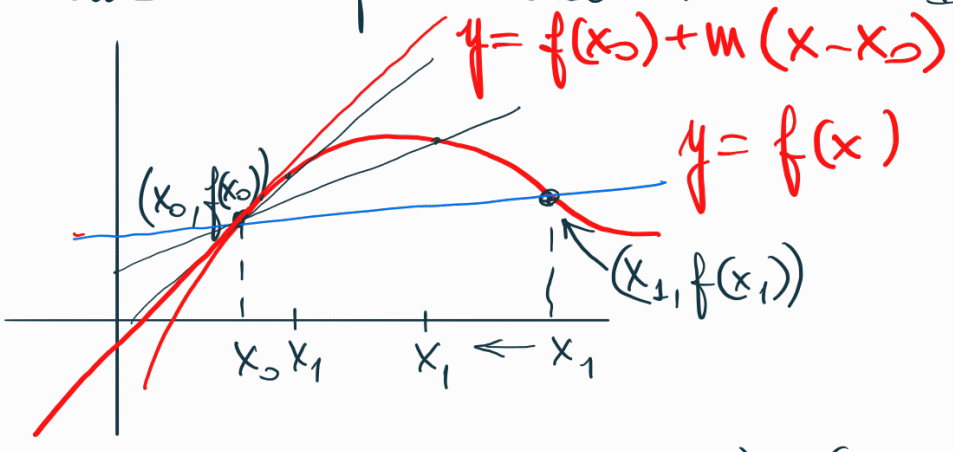
$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$

"velocità istantanea del punto all'istante $t_0$"

---

2) Concetto "geometrico-analitico" di derivata come coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione.

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $I$, siano $x_0 < x_1$ due due punti dell'intervallo $I$.




Eq^ne della retta passante per $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Adesso, tenendo fisso $x_0$, sposto $x_1$ verso $x_0$.
La retta passante per i due punti "diventa" la retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$ mentre il coefficiente angolare diventa

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Quindi questo limite si interpreta come il coeff^te angolare della retta tangente al grafico di $f$ nel punto $(x_0, f(x_0))$

**DEF** Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0$ punto non isolato di $X$. $f$ si dice **derivabile** in $x_0$ se esiste finito il limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \Big| \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$h = x - x_0 \to 0$

$x = x_0 + h$

In tal caso il numero $f'(x_0)$ si dice **derivata** di $f$ in $x_0$.

La quantità $P(x, x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si dice **rapporto incrementale** di $f$ tra i punti $x, x_0$.

---

Sia $f(x) = x^2$, calcoliamo $f'(3)$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \Big| \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} =$$

$h = x - 3 \to 0$

$x = 3 + h$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6 \quad \Rightarrow \quad f'(3) = 6$$

---

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad f'(-2)$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{-2+h} + \frac{1}{+2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2-2+h}{2h(-2+h)} \cdot 1 =$$

$(-2+h) \to -2$

$$= -\frac{1}{4}$$

---

Altre notazioni per la derivata

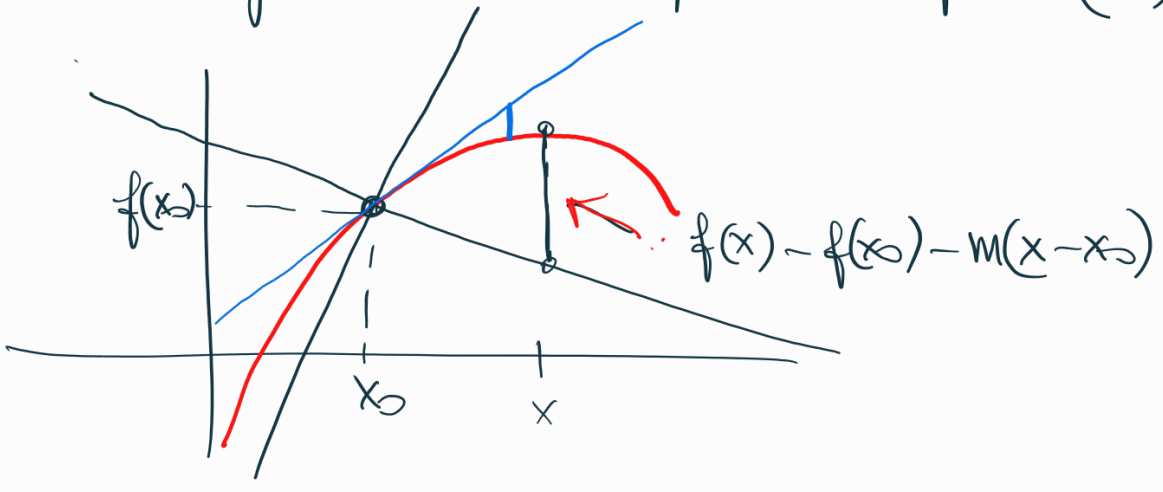
$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0) = \dot{f}(x_0)$$

---

Precisiamo il concetto di retta tangente al grafico di $f$

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in I$.

Consideriamo le generiche rette passanti per $(x_0, f(x_0))$




$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

---

<u>OSS.</u> Per $x \to x_0$, se $f$ è continua in $x_0$ si ha

$$f(x) = f(x_0) + m(x-x_0) + o(1) \quad \text{per } x \to x_0$$

$f(x) \to f(x_0)$, $m(x-x_0) \to 0$, $o(1) \to 0$

cioè $f(x) - f(x_0) - m(x-x_0) = o(1)$

Si definisce **retta tangente** al grafico di $f$ in $(x_0, f(x_0))$, se esiste, una retta della forma $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ verificante

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$