Diseq. trigonometrica

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x \geq \sqrt{3}$$

1° modo Poniamo $X = \cos x$, $Y = \sin x$

$$\begin{cases} Y - \sqrt{3}X \geq \sqrt{3} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

già concluso ieri.

2° modo: osservare che ogni combinazione lineare di $\sin x$ e $\cos x$ si scrive come una sinusoide con un'ampiezza e una fase.

$$f(x) = A\sin x + B\cos x \qquad \text{con } A, B \text{ non entrambi nulli se no è banale.}$$

Partiamo dalla formula di $\sin(x+\varphi)$

$$\sin(x+\varphi) = \underbrace{\cos\varphi}_{A}\sin x + \underbrace{\sin\varphi}_{B}\cos x$$

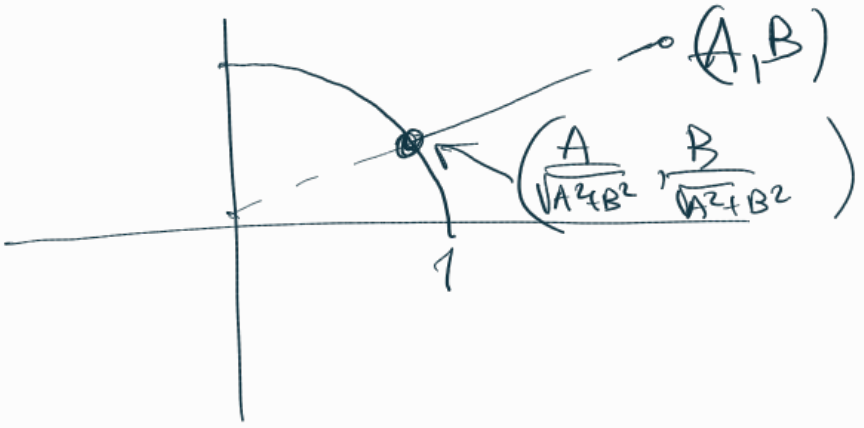
Vorremmo trovare φ t.c. $\begin{cases} \cos\varphi = A \\ \sin\varphi = B \end{cases}$

Questo si può fare solo se $A^2 + B^2 = 1$

$$f(x) = A\sin x + B\cos x =$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x\right)$$

Osserviamo che $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = \frac{A^2+B^2}{A^2+B^2} = 1$



Abbiamo "rinormalizzato" il vettore (A,B)

Posso trovare φ t.c.

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases}$$

φ è determinato a meno di multipli di 2π.

$$f(x) = A\sin x + B\cos x =$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\left(\underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\cos\varphi}\sin x + \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\sin\varphi}\cos x\right) =$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\,\sin(x+\varphi)$$

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x \geq \sqrt{3}$$

$$1\cdot\sin x - \sqrt{3}\cos x =$$

$A=1, \quad B=-\sqrt{3}$

$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = (*)$$

cerco φ t.c.

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

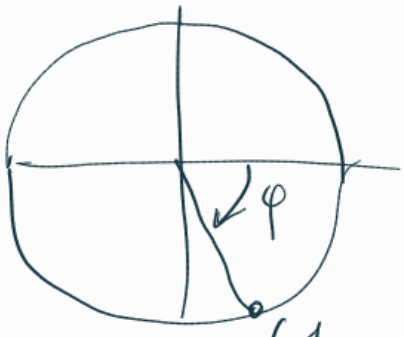
Ricapitoliamo:

$$A \sin x + B \cos x = \sqrt{A^2+B^2} \sin(x+\varphi)$$

dove

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases}$$

$\varphi = -\frac{\pi}{3}$



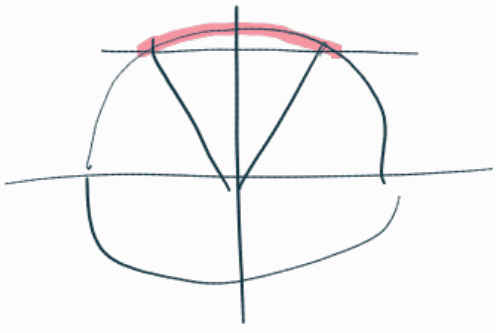
$(*) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

La diseq^ve diventa

$$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \sqrt{3}$$

$$\sin\underbrace{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}_{t} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$



$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \underbrace{t}_{x - \frac{\pi}{3}} \leq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

3° modo (metodo parametrico, passaggio a $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$)

Si dimostra che

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \forall x \neq (2k+1)\pi$$

dove $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

deve esistere $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, cioè $\frac{x}{2} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

cioè $x \neq (2k+1)\pi$

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x \geq \sqrt{3}$$ diventa

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{\sqrt{3}(1-t^2)}{1+t^2} \geq \sqrt{3}$$ moltiplico per $1+t^2>0$

$$2t - \sqrt{3}(1-t^2) \geq \sqrt{3}(1+t^2)$$

$$2t - \sqrt{3} + \sqrt{3}t^2 \geq \sqrt{3} + \sqrt{3}t^2$$

$$2t \geq 2\sqrt{3}$$

$$t \geq \sqrt{3}$$

$$\| \quad \| \quad \| \quad \|$$

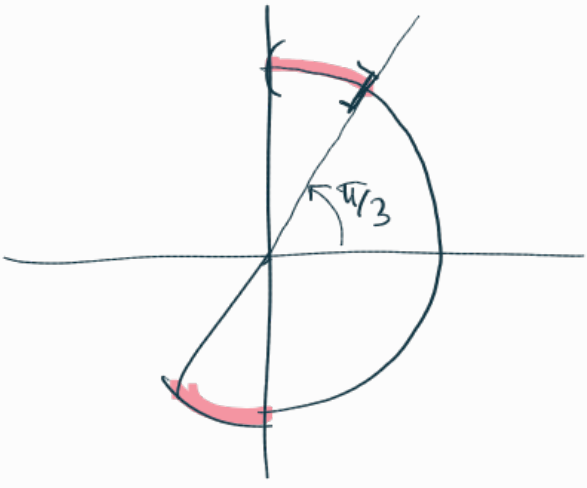
$$tg\left(\frac{x}{2}\right) \quad = \quad s$$

$$tg\, s \geq \sqrt{3}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\pi}{3} + k\pi \leq \underset{\| \quad \|}{s} < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\frac{x}{2}$$



$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x < \pi + 2k\pi$$

↖ qui prima c'era il $\leq$

Per $x = \pi + 2k\pi$ i passaggi precedenti non hanno senso perché non esiste $tg\,\frac{x}{2}$.

Ma per $x = \pi + 2k\pi$ se $x = 0$, $\cos x = -1$

la diseq^ne diventa

$$0 - \sqrt{3}(-1) \geq \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \geq \sqrt{3} \quad \text{vera}$$

Devo raggiungere alle soluzioni $X = \pi + 2k\pi$.

Sol^ni $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq X \leq \pi + 2k\pi$

Resta da dim.

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \forall x \neq (2k+1)\pi$$

Lemma $\quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x \qquad \forall x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{\cos^2 x} = \cos^2 x + \sin^2 x$

$1 + tg^2 x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x = 2\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = \text{(Lemma)}$$

($\frac{\sin x}{\cos x} = tg\, x$)

$$= 2\, tg\, x \cdot \frac{1}{1+tg^2 x} \qquad \forall x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = \frac{2}{1+tg^2 x} - 1 =$$

$$= \frac{1 - tg^2 x}{1+tg^2 x} \qquad \forall x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

Sostituisco x con $\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$\forall x \neq (2k+1)\pi$

Funzioni trigonometriche inverse

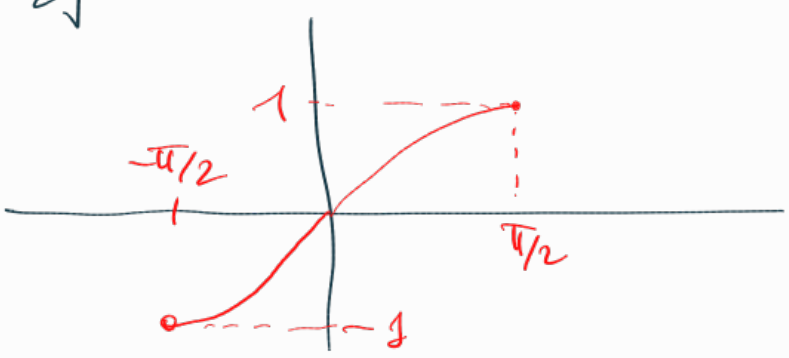
$\sin x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è né iniettiva né suriettiva

Per la suriettività, basta prendere come insieme di arrivo $[-1,1]$

Per l'iniettività si deve restringere il dominio a un intervallo in cui $\sin x$ è strett. monotòno

Si stabilisce di prendere come dominio $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\sin x\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$ biiettiva



è iniettiva perché strett. crescente

è suriettiva perché una funzione continua in un

intervallo assume tutti i valori compresi tra il sup e l'inf, in questo caso tra -1 e 1.

Resta quindi definita l'inversa $f^{-1}(y) = \arcsin y$

$$f^{-1}: [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\psi \qquad\qquad \psi$$
$$y \longmapsto \text{l'unico } x \text{ t.c } \sin x = y.$$

$f^{-1}(y)$ = arcsen y

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

~~$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{5}{6}\pi$~~

~~$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$~~