TEOREMA di esistenza degli zeri

Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$.

Se $f(a)f(b)<0$, cioè $f(a)$ e $f(b)$ hanno segni opposti,

allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c $f(c)=0$

Oggi in primo luogo vediamo delle conseguenze di questo risultato

COROLLARIO (teorema dei valori intermedi)

Sia f continua in I intervallo di $\mathbb{R}$ (aperto, chiuso, limitato, illimitato).

Allora f assume tutti i valori compresi tra

$$\inf_I f = \inf\{y = f(x) : x \in I\}$$

e

$$\sup_I f = \sup\{y = f(x) : x \in I\}.$$

Applicazione: $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $\mathbb{R}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} x^3 = +\infty, \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}} x^3 = -\infty.$$

Teorema $\Rightarrow$ $f(x)$ assume tutti i valori compresi tra $-\infty$ e $+\infty$, cioè tutti i valori reali

$\Rightarrow$ f è suriettiva

Allo stesso modo: $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua,

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} e^x = 0 \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} e^x = +\infty$$

$\to$ e^x assume tutti i valori in $(0,+\infty)$

$\Rightarrow e^x : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ suriettiva

OSS $f: I \to \mathbb{R}$ continua

$\operatorname{Im} f = \{y = f(x) : x \in I\}$ è un insieme che contiene tutti gli elementi tra il suo inf e il suo sup.,
cioè $\operatorname{Im} f$ è un intervallo.

Enunciato sintetico del thm. dei valori intermedi:

> L'immagine di una funzione continua in un intervallo è un intervallo.

Dim. Corollario

Sia $\inf_I f < \lambda < \sup_I f = \sup \operatorname{Im} f$
$\neq \inf \operatorname{Im} f$

se $\lambda < \sup \operatorname{Im} f \Rightarrow \lambda$ non è un maggiorante di $\operatorname{Im} f$

$\Rightarrow \exists\, x_1 \in I$ t.c. $f(x_1) > \lambda$

Allo stesso modo, poiché $\lambda > \inf \operatorname{Im} f \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x_2 \in I$ t.c. $f(x_2) < \lambda$

Prendo l'intervallo $[x_1, x_2]$ (oppure $[x_2, x_1]$ se $x_2 < x_1$)

$[x_1, x_2] \subseteq I$ f è continua in $[x_1, x_2]$.

Applico il teorema degli zeri nell'intervallo $[x_1, x_2]$ alla funzione

$h(x) = f(x) - \lambda$ (continua in $[x_1, x_2]$)

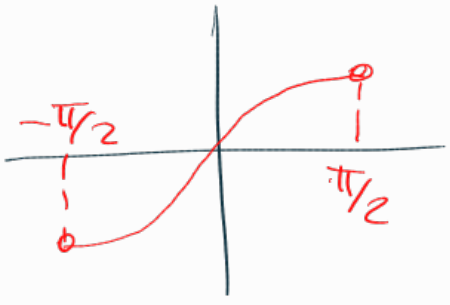
$h(x_1) = f(x_1) - \lambda > 0$, $h(x_2) = f(x_2) - \lambda < 0$

Teor. degli zeri $\Rightarrow \exists c \in [x_1, x_2]$ t.c. $h(c) = 0$

$\Rightarrow f(c) - \lambda = 0 \Rightarrow f(c) = \lambda$ $\square$

Esempio: $f(x) = \sin x \Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ continua

$\sup_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \sin x = \max_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1$



$\inf_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \sin x = \min_{[\ ]} \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

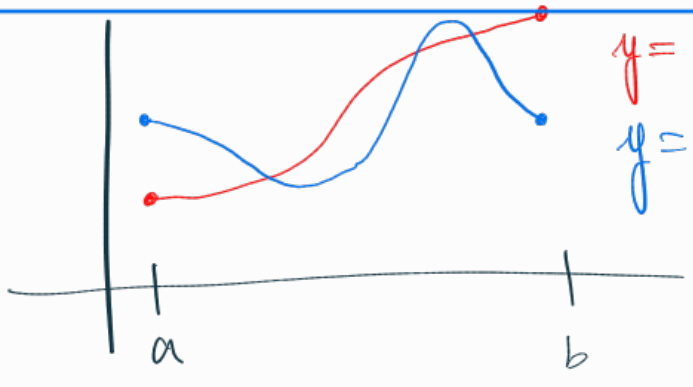
$\Rightarrow$ teor. valori intermedi $\Rightarrow \sin x \Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ assume tutti i valori compresi tra -1 e 1

$\operatorname{im} \sin x \Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} = [-1, 1]$

COROLLARIO 2 f, g continue in $[a, b]$. Supponiamo che

$$f(a) < g(a), \quad f(b) > g(b).$$

Allora $\exists\, c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = g(c)$ ..



Dim Poniamo $h(x) = f(x) - g(x)$ continua in $[a,b]$.

$h(a) = f(a) - g(a) < 0$, $h(b) = f(b) - g(b) > 0$

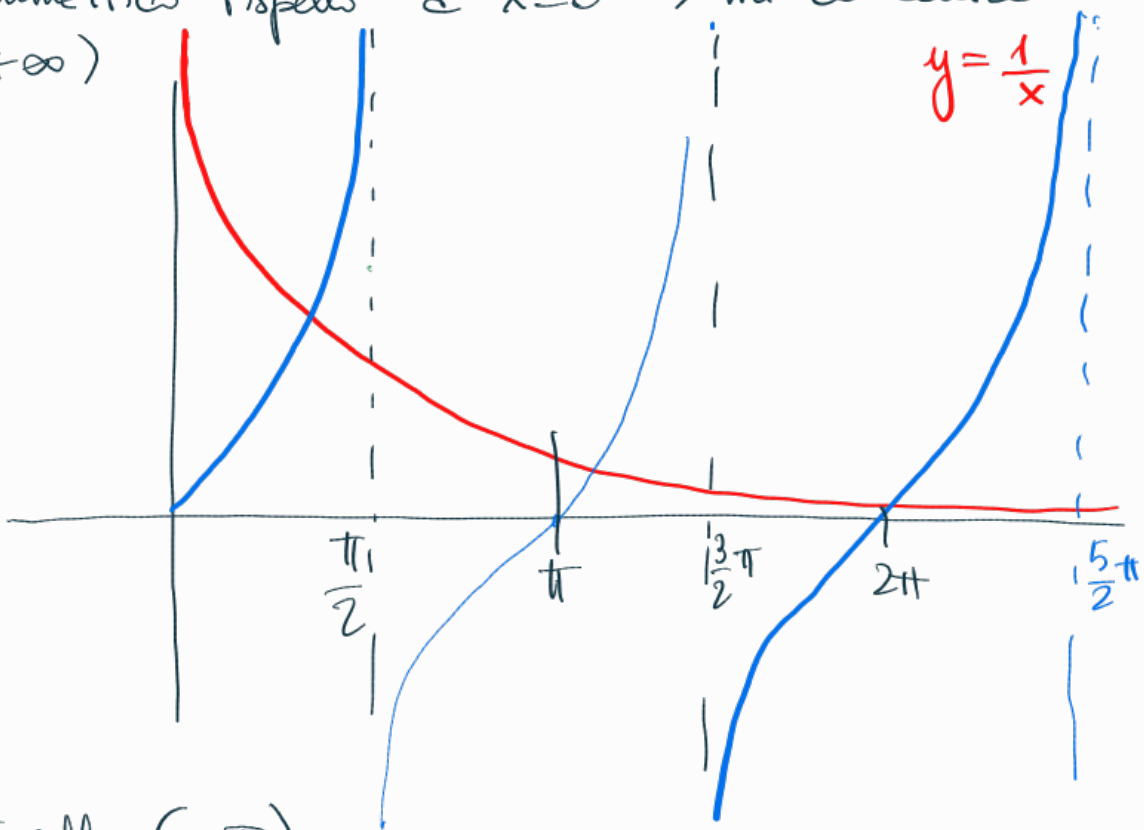
$\Longrightarrow$ teor degli zeri $\exists c \in (a,b)$ t.c $h(c) = 0$

$\Rightarrow f(c) = g(c)$ $\square$

Problema: quante soluzioni ha l'eq^{ne}

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{x}$$

oss le due funzioni sono dispari $\Rightarrow$ l'insieme delle sol^{ni} è simmetrico rispetto a $x=0$ $\Rightarrow$ mi concentro su $(0, +\infty)$



Considero l'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

per $x \to 0^+$, $\frac{1}{x} \to +\infty$, $\operatorname{tg} x \to 0$ $\Rightarrow$ def^{tu} per $x \to 0^+$

$\operatorname{tg} x < \frac{1}{x} \Rightarrow \exists\, x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ t.c $\operatorname{tg} x_1 < \frac{1}{x_1}$

per $x \to \frac{\pi}{2}^-$, $\frac{1}{x} \to \frac{2}{\pi}$, $\operatorname{tg} x \to +\infty$

$\Rightarrow$ definitivamente per $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ $\quad \frac{1}{x} < \operatorname{tg} x$

$\Rightarrow \exists\, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ t.c $\quad \frac{1}{x_2} < \operatorname{tg} x_2$

Applico il corollario 2 all'intervallo $[x_1, x_2]$

$\Rightarrow \exists\, c_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ t.c. $\quad \frac{1}{c_1} = \operatorname{tg} c_1$

Questo c_1 è unico perché $\operatorname{tg} x$ è strett. crescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{1}{x}$ è strett. decresc. 4

Poi prendo l'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$

$\operatorname{tg} x\Big|_{x=\pi} = 0 \qquad \frac{1}{x}\Big|_{x=\pi} = \frac{1}{\pi} > 0$

Per $x \to \left(\frac{3}{2}\pi\right)^-$ $\quad \operatorname{tg} x \to +\infty$, $\quad \frac{1}{x} \to \frac{2}{3\pi} < +\infty$

$\Rightarrow \exists\, x_3 \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ t.c. $\quad \operatorname{tg} x_3 > \frac{1}{x_3}$

Applico il teor. corollario 2

$\Rightarrow \exists\, c_2 \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ t.c $\quad \operatorname{tg} c_2 = \frac{1}{c_2}$.

$\Rightarrow$ Questo punto è unico, per la monotonia della funzione

Allo stesso modo, $\exists$ unica soluzione $c_3 \in \left(2\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists!$ soluzione in $\left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Infinite soluzioni positive, una in ciascuno di questi intervalli

$\Rightarrow$ ovviamente ci sono infinite soluzioni negative

Sappiamo che:

f strettamente monotòna (strett. crescente o strett. decrescente)
$\Rightarrow$ f iniettiva.

Vale il viceversa?

NO, per es. $f(x) = \frac{1}{x}$ è iniettiva

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

ma non è né crescente né decrescente.

TEOREMA

Sia f continua in I intervallo

Allora

f iniettiva $\Leftrightarrow$ f strett. monotòna

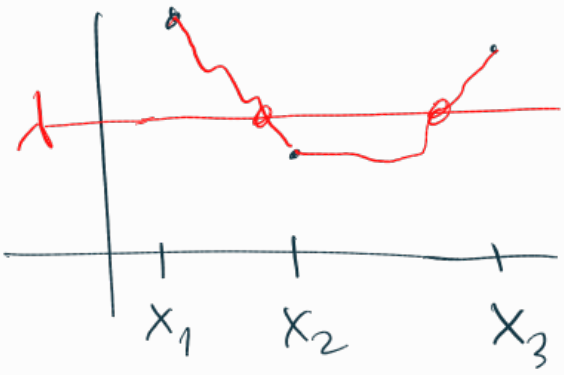
Cenno della dim.

E' chiaro che f iniettiva e monotòna $\Rightarrow$ strett. monotòna

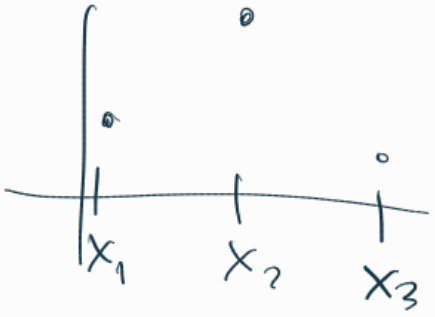
Supponiamo che f non sia monotòna

$\Rightarrow$ deve valere una delle delle seguenti situazioni:

- $\exists\ x_1, x_2, x_3 \in I$ t.c. $x_1 < x_2 < x_3$ verificanti $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$



- $\exists\ x_1, x_2, x_3 \in I$ t.c $x_1 < x_2 < x_3$ verificanti $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$



Nel primo caso, preso λ t.c

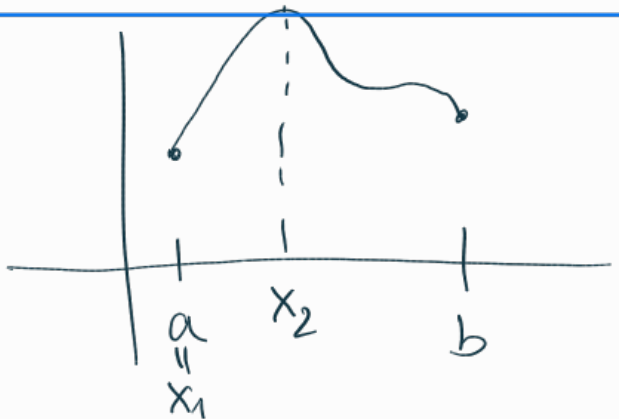
$$f(x_2) < \lambda < \min\{f(x_1), f(x_3)\}$$

Applicando due volte il teor. dei valori intermedi si trovano due pti distinti in cui f vale λ, (vedi figura) ciò contraddice l'ipotesi.

TEOREMA di WEIERSTRASS

Se f è una funzione continua in $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato, essa ammette max e min. assoluti, cioè $\exists\ x_1, x_2 \in [a,b]$ t.c

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \qquad \forall x \in [a,b]$$



OSS Conseguenze del teorema di Weierstrass

1) Una funzione continua in $[a,b]$ è limitata.

2) f continua in $[a,b] \Rightarrow \operatorname{im} f$ è un intervallo chiuso e limitato, $\operatorname{im} f = [\min f, \max f]$

Dim thm. di Weierstrass (dim. l'esistenza del massimo, per il minimo lascio per esercizio)

Passo 1:

costruzione di una succ^ne massimizzante

cioè una successione $\{x_n\} \subset [a,b]$ t.c.

$$f(x_n) \to \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

caso a) se $\sup f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda - \frac{1}{n}$ non è un maggiorante dell'immagine $\{f(x) : x \in [a,b]\}$

$\exists\, x_n \in [a,b]$ t.c. $\lambda \geq f(x_n) > \lambda - \frac{1}{n}$

Thm. carabinieri $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lambda = \sup f$

Caso b) se $\sup f(x) = +\infty$ (OSS alla fine dimostreremo che non è possibile, ma ora non posso escluderlo)

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists\, x_n \in [a,b]$ t.c.

$$f(x_n) > n \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty = \sup f$$

Passo 2 Per Bolzano-Weierstrass, la succ^{ne} $\{x_n\} \subset [a,b]$ (limitata) ammette una sottosucc^{ne} convergente

$$x_{k_n} \xrightarrow{n\to+\infty} \bar{x} \in [a,b]$$

↳ per la permanenza del segno

$$f(x_{k_n}) \xrightarrow{n\to+\infty} f(\bar{x})$$ per la continuità in $\bar{x}$ e il teorema ponte.

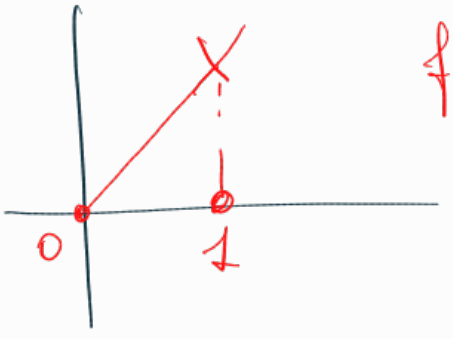
D'altra parte $\{f(x_{k_n})\}$ è una sottosucc^{ne} di $\{f(x_n)\}$, che tende a $\sup f$.

Unicità del limite $\Rightarrow$ $f(\bar{x}) = \sup f$. $\Rightarrow$

$f(\bar{x})$ è il max. assoluto di f. □

OSS Tutte le ipotesi del teorema di Weierstrass servono:

1) Serve f continua in $[a,b]$.



$f(x)$ definita in $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

non ammette max.

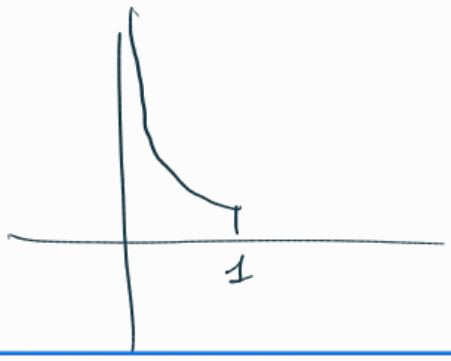
2) Intervallo deve essere limitato

$f(x) = x$ in $[0,+\infty)$ non ha massimo

3) Intervallo deve essere chiuso

$f(x) = \frac{1}{x}$ in $(0, 1]$

non ha massimo.

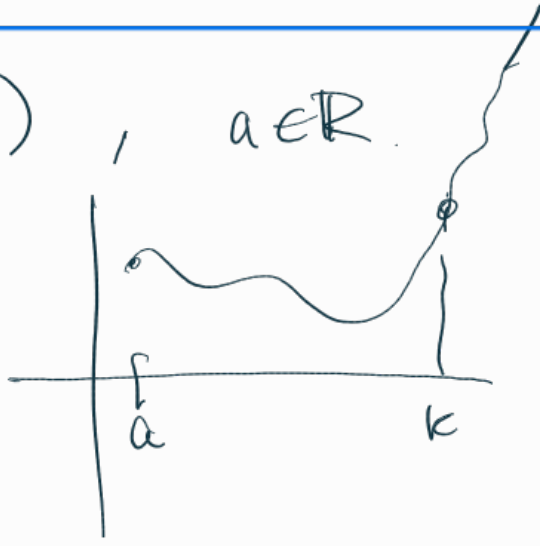


Varianti del Teor. di Weierstrass.

PROP 1 f continua in $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$

e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Allora f ammette min. assoluto in $[a, +\infty)$



Dim Poiché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\exists\, K$ t.c. $\forall x > K \quad f(x) > f(a)$

Applico il teor. di Weierstrass in $[a, K]$

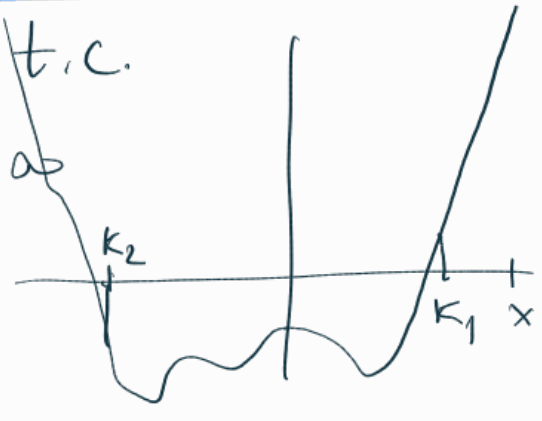
$\Rightarrow \exists\, x_1 \in [a, K]$ t.c. $f(x_1) \leq f(x) \ \forall x \in [a, K]$

Se $x > K \quad f(x) > f(a) \geq f(x_1)$

$\Rightarrow f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$

PROP 2 Sia f continua in $\mathbb{R}$ t.c.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



Allora f ammette min. assoluto.

Dim. (cenno) Considero $f(0)$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists K_1>0$ t.c $f(x)>f(0)\ \forall x>K_1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \exists K_2<0$ t.c. $f(x)>f(0)\ \forall x<K_2$

Applico Weierstrass all'intervallo $[K_2,K_1]\ni 0$.

$\Rightarrow \exists\ \bar{x}$ t.c. $f(\bar{x})\le f(x)\ \forall x\in[K_2,K_1]$

ma se $x<K_2$ oppure $x>K_1$

$f(x)>f(0)\ge f(\bar{x})$ □

PROP 3 Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua t.c

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lambda\in\mathbb{R}$.

Allora f ammette massimo assoluto oppure min. assoluto. (almeno uno dei due).

