Nuova funzione trigonometrica:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Dominio della tg: $\cos x \neq 0 \iff x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ –

$x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \dots$

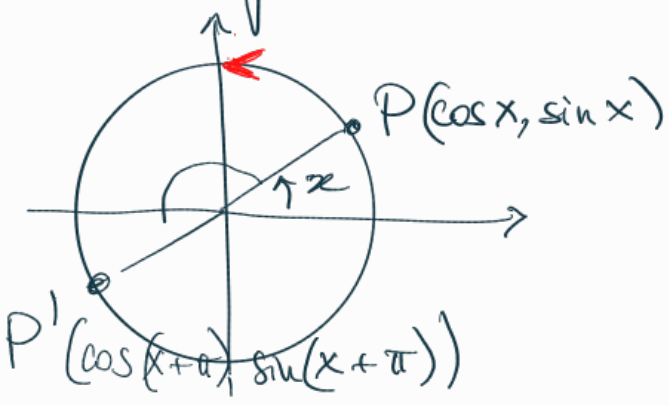
$$\text{dom tg} = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

tg x è periodo di periodo 2π perché si basa sui valori di $\sin x$ e $\cos x$.

In realtà è periodica di periodo π

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+\pi) \qquad \forall x \in \text{dom tg}.$$

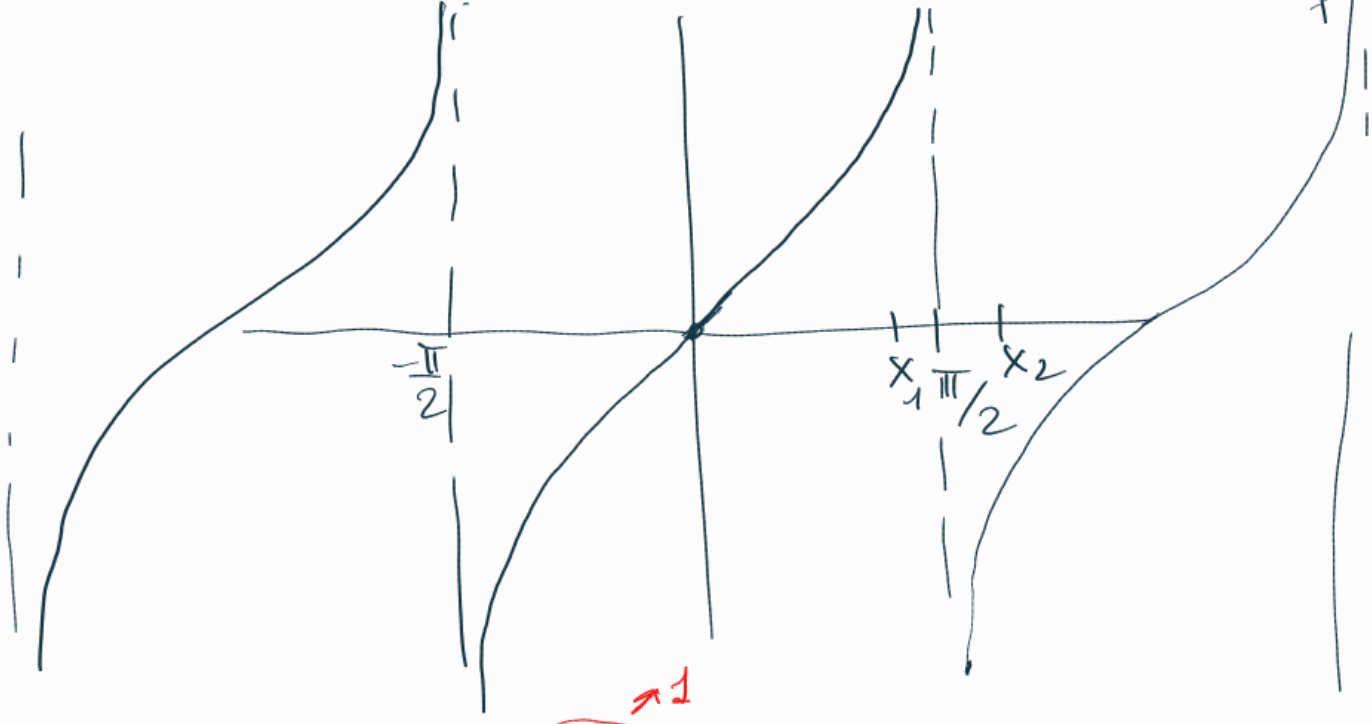
$$= \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$$



tg x è strettamente crescente in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\Rightarrow$ strett. crescente in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Inoltre tg x è una funzione dispari

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$



$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$$

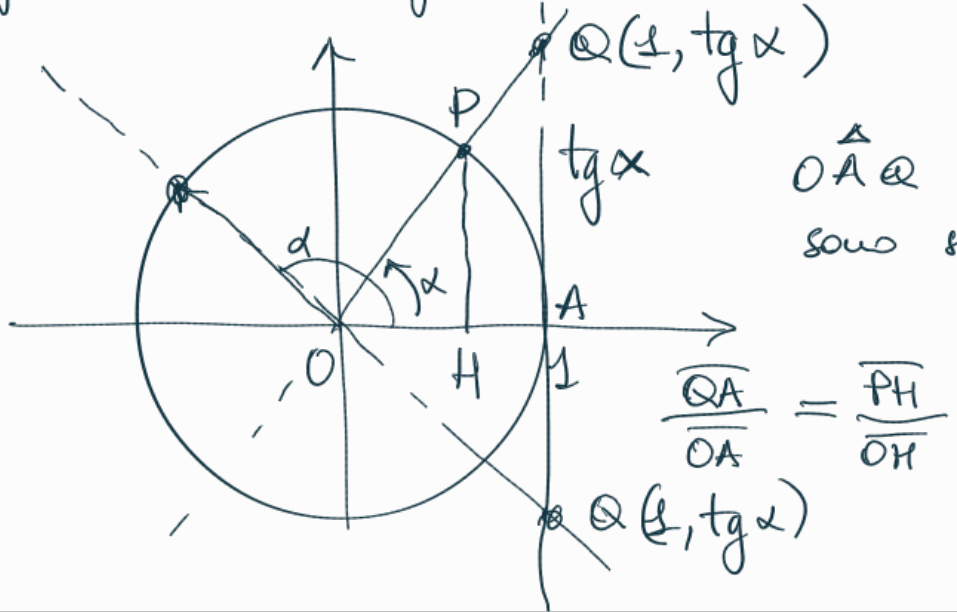
($\sin x \to 1$, $\cos x \to 0^+$)

$\operatorname{tg} x$ è strettamente crescente in ogni intervallo in cui è definita

$\operatorname{tg} x$ non è crescente nel suo dominio.

Significato geometrico di $\operatorname{tg} x$.

$\operatorname{tg}\alpha$ si interpreta, sulla circonferenza goniometrica, come l'ordinata del punto in cui la retta individuata dall'origine e dall'angolo α interseca la retta $x=1$



$O\hat{A}Q$ e $O\hat{H}P$ sono simili

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{QA} = \frac{\overbrace{\overline{PH}}^{\sin\alpha}}{\underbrace{\overline{OH}}_{\cos\alpha}} \cdot \underbrace{\overline{OA}}_{1} = \operatorname{tg}\alpha$$

Alcuni valori speciali di $\operatorname{tg} x$

$$\operatorname{tg} 0 = 0$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

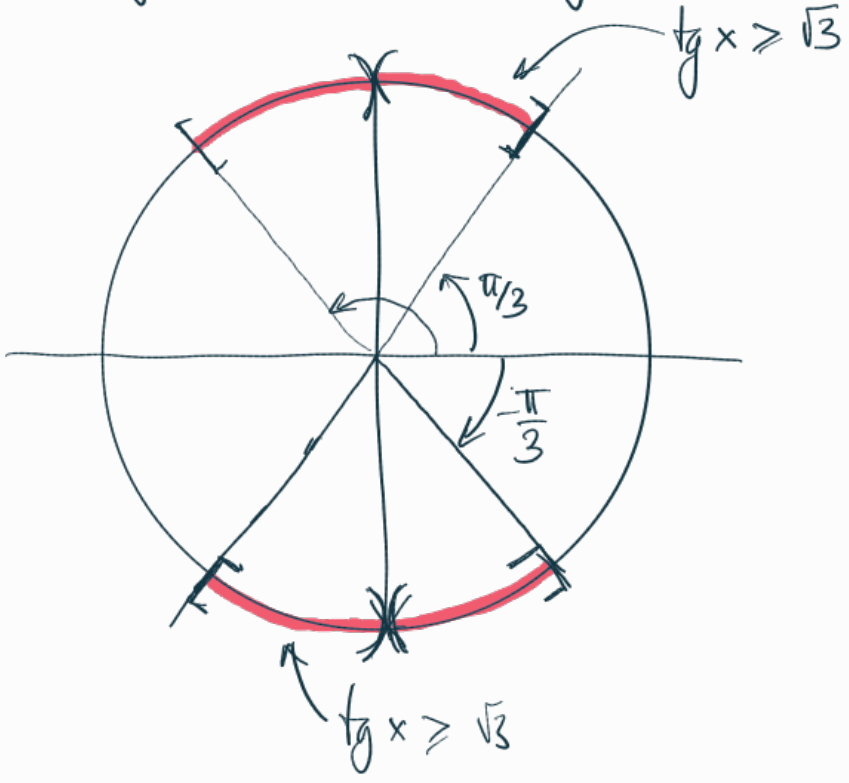
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\pi/3}{\cos\pi/3} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

Risolvere la disequ $\quad \operatorname{tg}^2 x \geq 3$

$$\Leftrightarrow \quad (\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}) \vee (\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3})$$

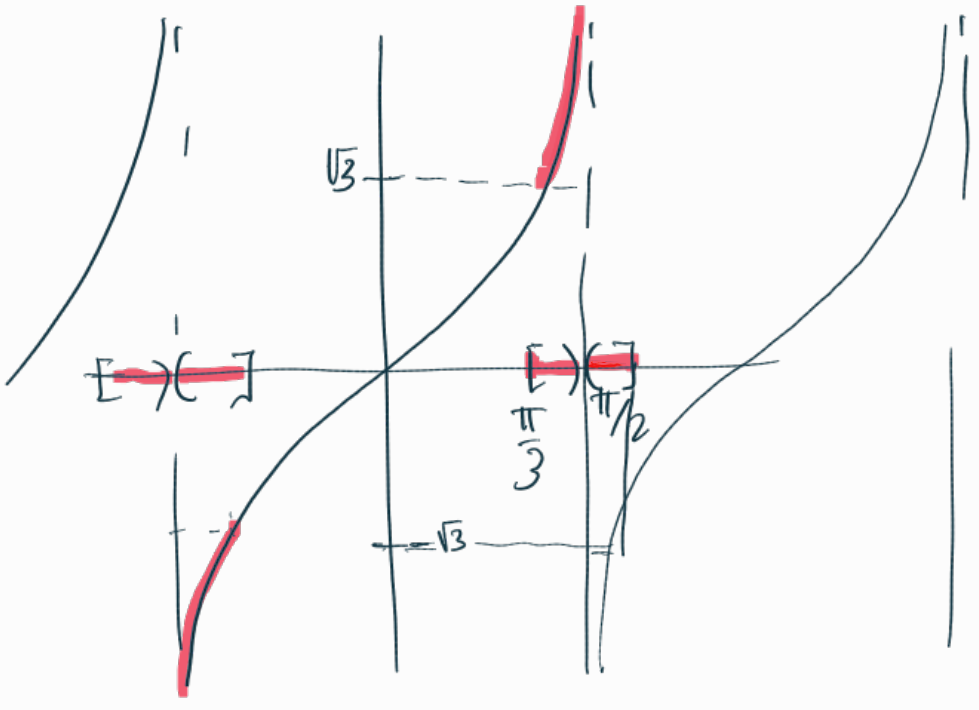


Soluzioni: $\left(\frac{\pi}{3}+k\pi \leq x < \frac{\pi}{2}+k\pi\right) \vee$

$$\vee \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi < x \leq -\frac{\pi}{3}+k\pi\right)$$

Oppure, più sinteticamente:

$$\frac{\pi}{3}+k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi+k\pi \quad , \quad x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$$

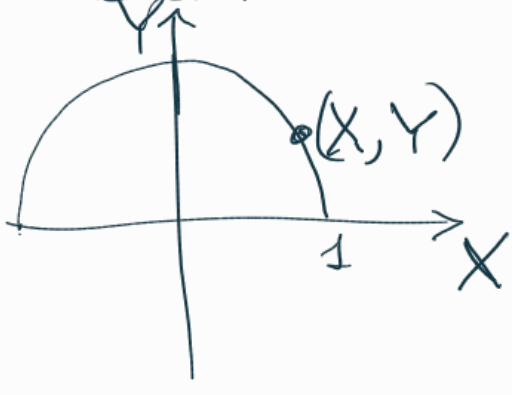


Diseq^ni trigonometriche

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x \geq \sqrt{3}$$

$$L\sin(x+\varphi) \geq \sqrt{3}$$

1° modo Ricordiamo che $(\cos x, \sin x)$ sono le coord. di un punto sulla circonf unitaria



Poniamo $\cos x = X$

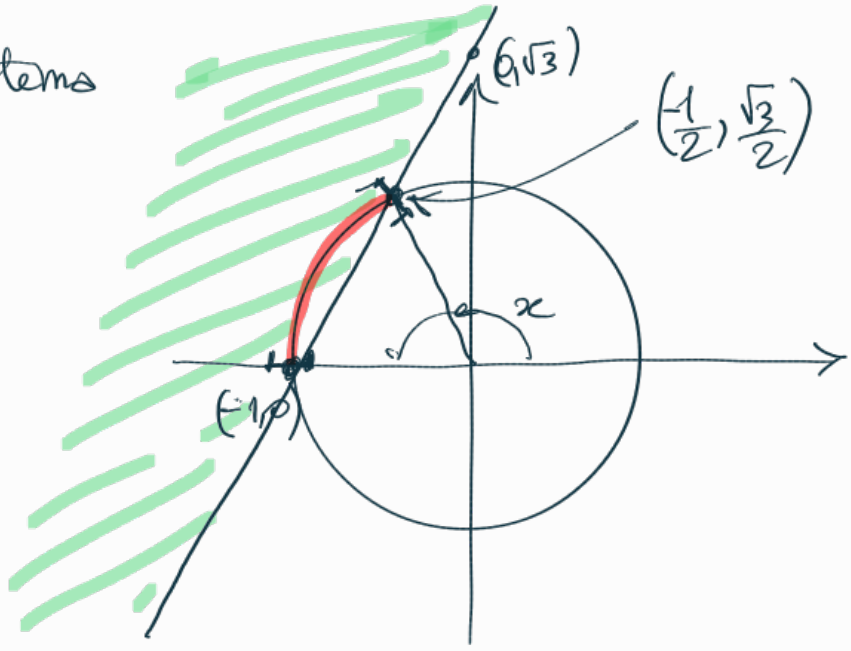
$\sin x = Y$

X e Y verificano $X^2 + Y^2 = 1$

La nostra diseq^ne diventa $Y - \sqrt{3}X \geq \sqrt{3}$

Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ Y \geq \sqrt{3}(X+1) \end{cases}$$



Trovo intersezioni tra circonferenza e retta

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ Y = \sqrt{3}(X+1) \end{cases} \Rightarrow X^2 + 3(X+1)^2 = 1$$

$$X^2 + 3X^2 + 6X + 3 = 1$$

$$4X^2 + 6X + 2 = 0$$

$$2X^2 + 3X + 1 = 0$$

$$X_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} =$$

$$= \frac{-3 \pm 1}{4} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$X = -1 \Rightarrow \quad Y = \sqrt{3}(X+1) = 0$$

$$X = -\frac{1}{2} \Rightarrow \quad Y = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$(-1,0)$ corrisponde a $x = \pi + 2k\pi$

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ corrisponde a $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$$

2° modo Si basa sull'osservazione che una combinazione lineare di $\sin x$ e $\cos x$ si può scrivere sempre come una sinusoide

$$A\cos x + B\sin x = L\sin(x+\varphi)$$

dove L e φ sono dei numeri reali dipendenti da A e B

(da completare)