Def $f(x)$ è continua nel pto $x_0 \in \text{dom } f$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

TEOREMA (continuità della funzione composta)

Sia $g : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$

$f : Y \to \mathbb{R}$

(quindi resta definita la funzione composta $f \circ g : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(g(x))$)

Sia g continua in x_0, f continua in $g(x_0)$

Allora $f \circ g$ è continua in x_0.

Applicazione $\sin(x^2 + \log x)$ è continua in $(0, +\infty)$

Dim Vogliamo provare che

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) \stackrel{?}{=} f(g(x_0))$$

sapendo che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

$$\lim_{y \to g(x_0)} f(y) = f(g(x_0))$$

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to g(x_0)} f(y) = f(g(x_0))$$

$y = g(x) \to g(x_0)$

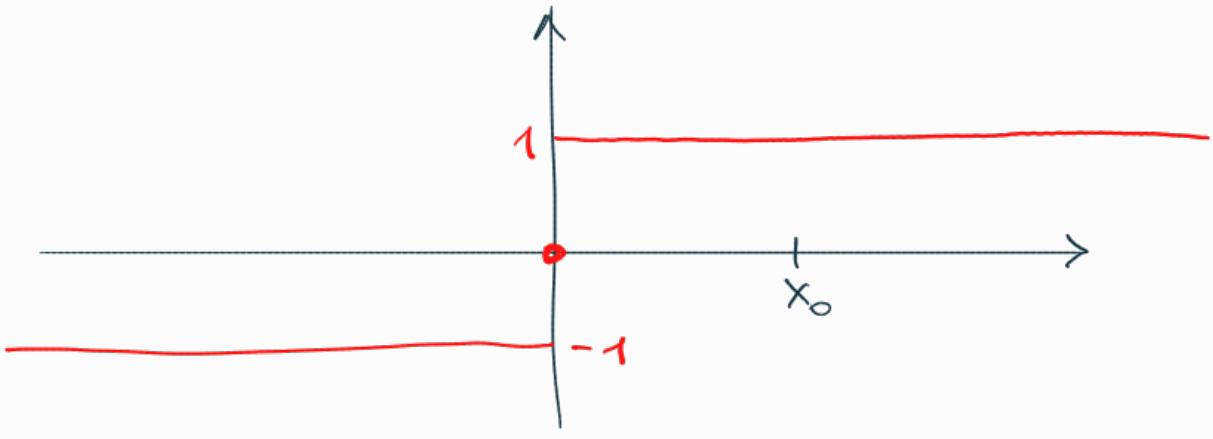
Non abbiamo verificato la cond (*) (vedi lezione di ieri)

$g(x) \neq g(x_0)$ def^{te} per $x \to x_0$

Ma ieri avevamo detto che questa condizione non serve se f è continua in $g(x_0)$. Quindi la sostituzione è lecita. □

Esempi di funzioni discontinue:

- $f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$



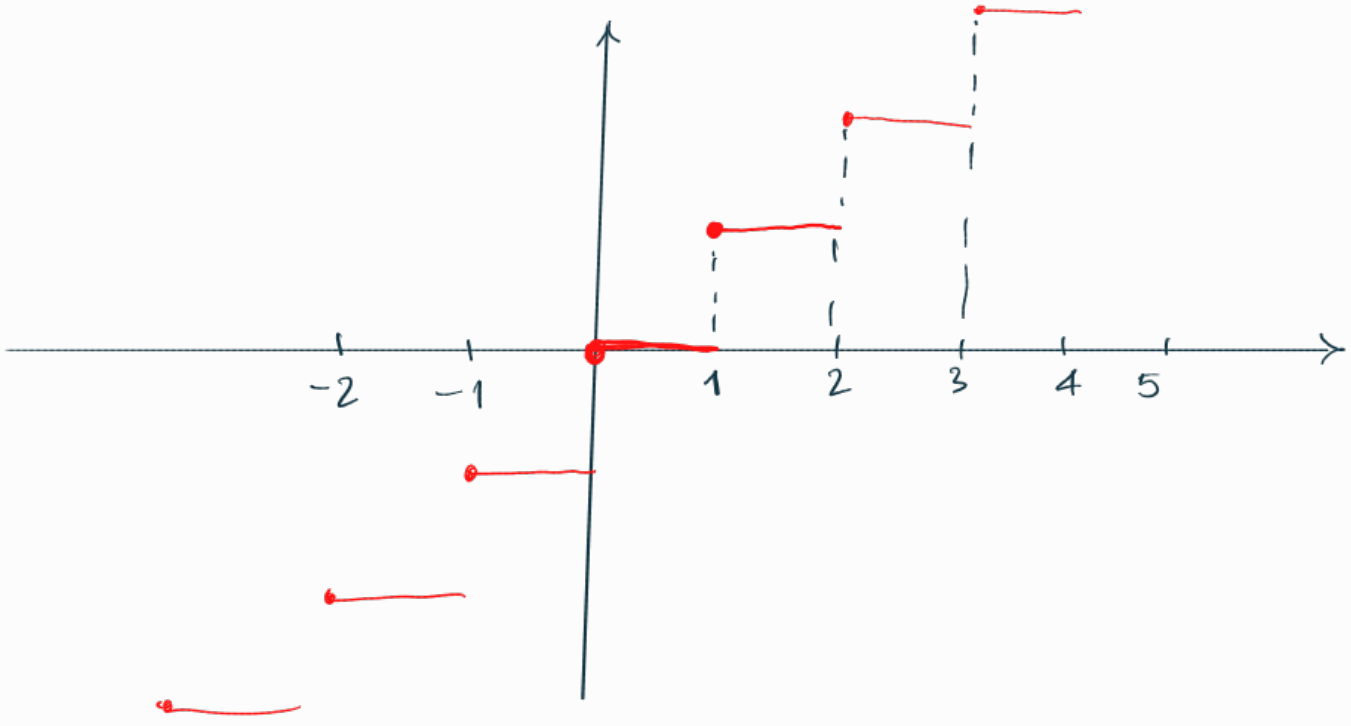
f è continua in tutti i pti diversi da 0.

Se $x_0 = 0$, $\lim_{x \to 0} \operatorname{sign} x \nexists$, più precisamente

$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sign} x = 1$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sign} x = -1$

DEF f ha una **discontinuità di salto** in $x_0 \in \operatorname{dom} f$ se $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$, ma sono diversi tra loro.

- $f(x) = \lfloor x \rfloor$ = parte intera di x = $\max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$



Questa f è continua in tutti i punti che non siano interi.

Se $x_0 \notin \mathbb{Z}$ $\quad \lim_{x \to x_0} \lfloor x \rfloor = \lfloor x_0 \rfloor$

Se $x_0 \in \mathbb{Z}$, allora $\lim_{x \to x_0^+} \lfloor x \rfloor = \lfloor x_0 \rfloor$ ← f è continua da destra

$\lim_{x \to x_0^-} \lfloor x \rfloor = \lfloor x_0 \rfloor - 1$

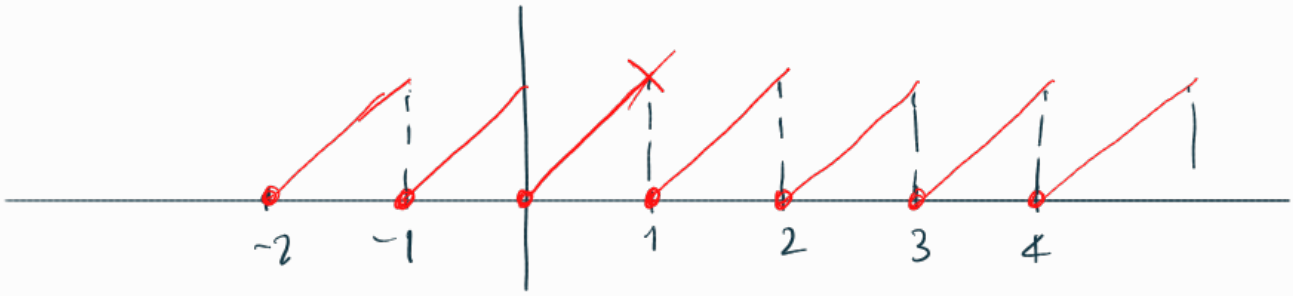
$\Rightarrow$ sono discontinuità di salto

- $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ parte frazionaria

$\{4\} = 0$

$\{\pi\} = 0,1415\ldots$

$\{-\pi\} = -\pi - (-4) = 4 - \pi \quad 0,858\ldots$



$\{x\}$ è periodica di periodo 1 $\quad \{x+1\} = \{x\}$

è continua in tutti i punti non interi.

se $x_0 \in \mathbb{Z}$ $\quad \lim_{x \to x_0^+} \{x\} = 0 = \{x_0\}$ $\quad$ $\{x\}$ è continua da destra.

$\lim_{x \to x_0^-} \{x\} = 1$ $\quad \Rightarrow$ quindi ha un salto in $x = x_0$

Classificazione dei punti di discontinuità:

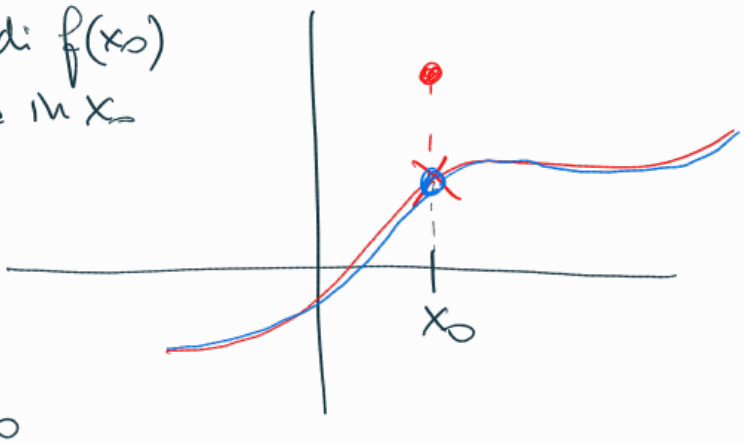
Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, pto non isolato di X.

Se f non è continua in x_0, diremo che:

1) f ha una **discontinuità eliminabile** in x_0 se

$\exists$ finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$, ma tale limite è diverso da $f(x_0)$

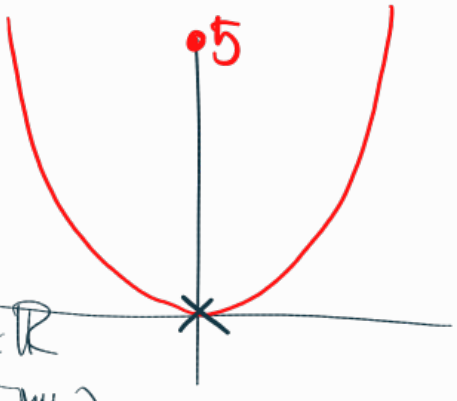
Si chiama discontinuità eliminabile perché cambiando il valore di $f(x_0)$ la funzione diventa continua in x_0



Poniamo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R} & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

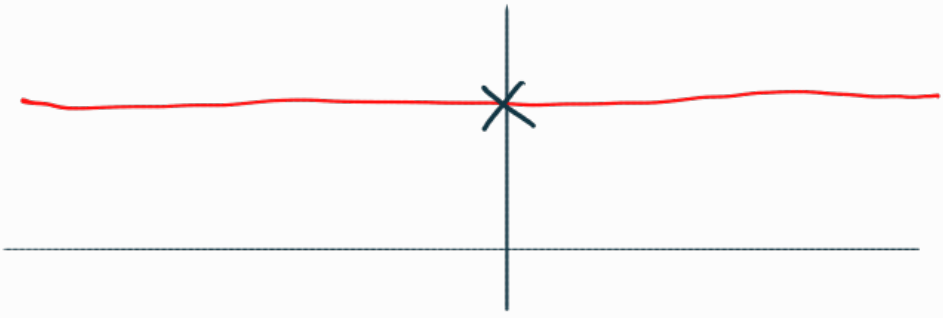
Esempio $\quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

è continua.

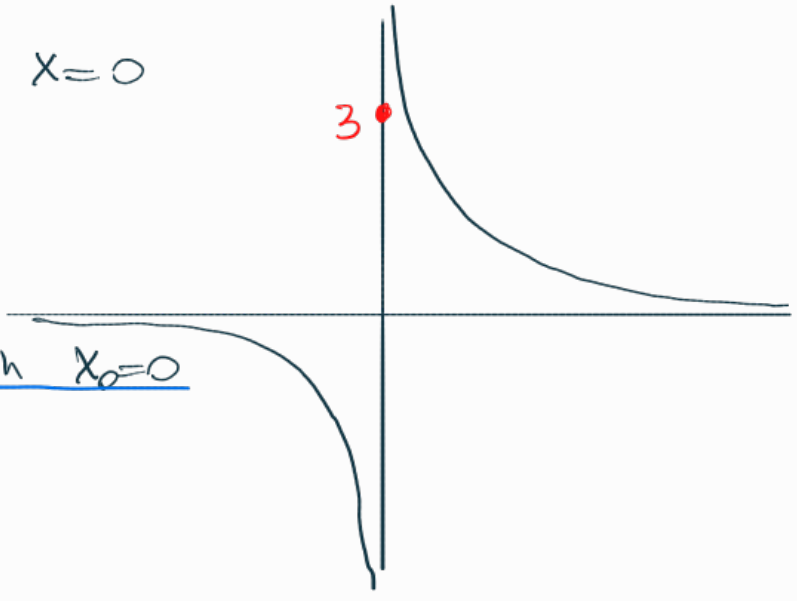
Esempio: $f(x) = (\operatorname{sign} x)^2 = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



2) **discontinuità di salto** o di **1ª specie**: già vista

3) **discontinuità di 2ª specie**: tutti gli altri casi di discontinuità.

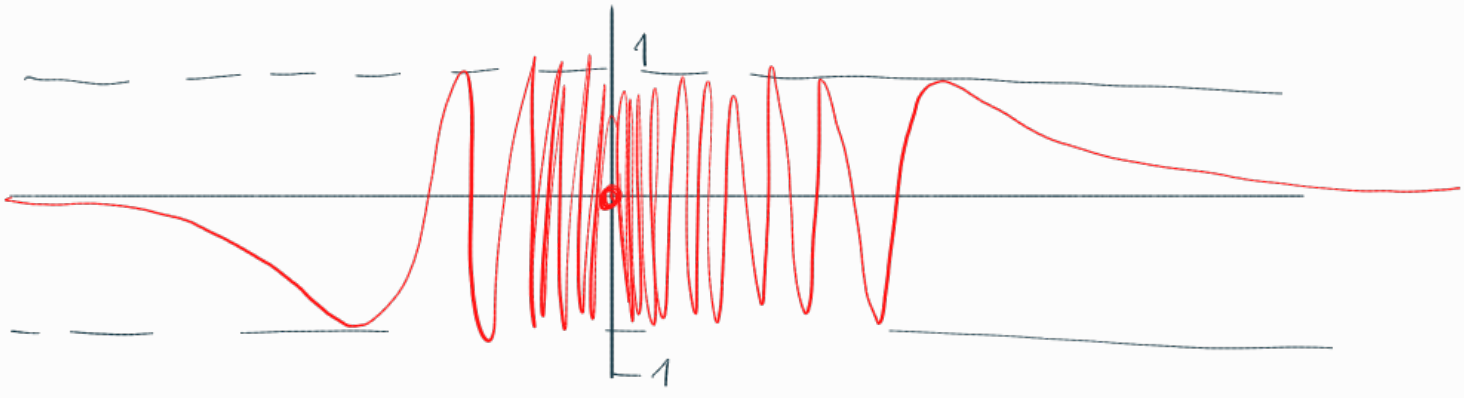
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



discontinuità di 2ª specie in $x_0 = 0$

$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

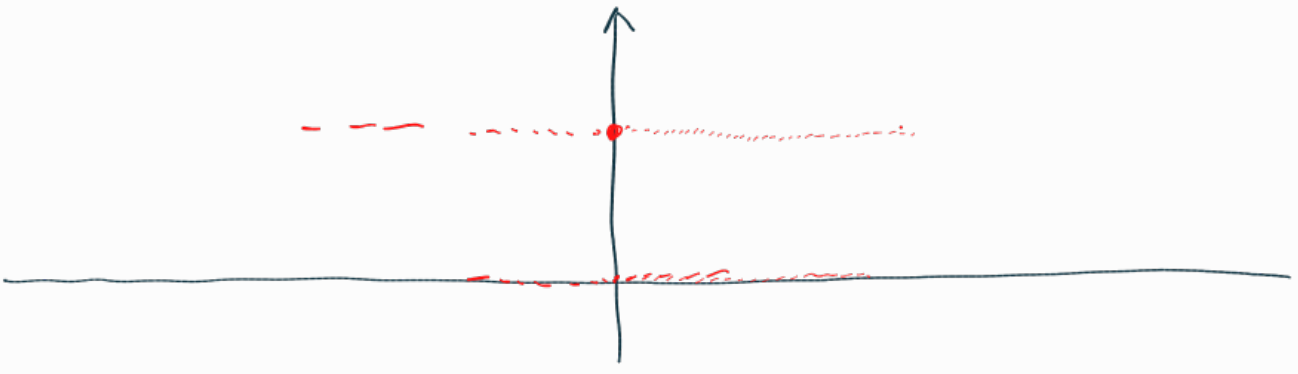
Esempio $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



$\lim_{x\to 0^+} f(x) \nexists$ $\quad$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) \nexists$

Funzione di Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$



$\lim_{x\to x_0} f(x) \nexists$ per nessun $x_0 \in \mathbb{R}$ (discontinuità di 2ª specie in tutti i punti)

(infatti in ogni intervallo ci sono pti in cui f vale 1 e pti " " " " 0

Esercizio:

Studiare, al variare di $p>0$, la continuità di

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+px)}{x} & \text{se } x>0 \\ \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+2} & \text{se } x\le 0 \end{cases}$$

oss f è continua in tutti i pti $x_0>0$ $\forall p>0$

Infatti in un intorno di x_0 si ha $f(x) = \dfrac{\log(1+px)}{x}$

f è continua in $x_0<0$ $\forall p>0$

Resta il pb. della continuità in $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+3x+1}{x^2+2} = \frac{1}{2} = f(0)$$

f è continua da sinistra $\forall p > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+px)}{px}\, p = p \overset{?}{=} f(0) = \frac{1}{2}$$

$\frac{\log(1+px)}{px} \to 1$

f è continua in $0 \iff p = \frac{1}{2}$

Per $p \neq \frac{1}{2}$, f ha una discontinuità di salto in $x_0 = 0$

Studiare la continuità di

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f è evidentemente continua in $x_0 \neq 0$

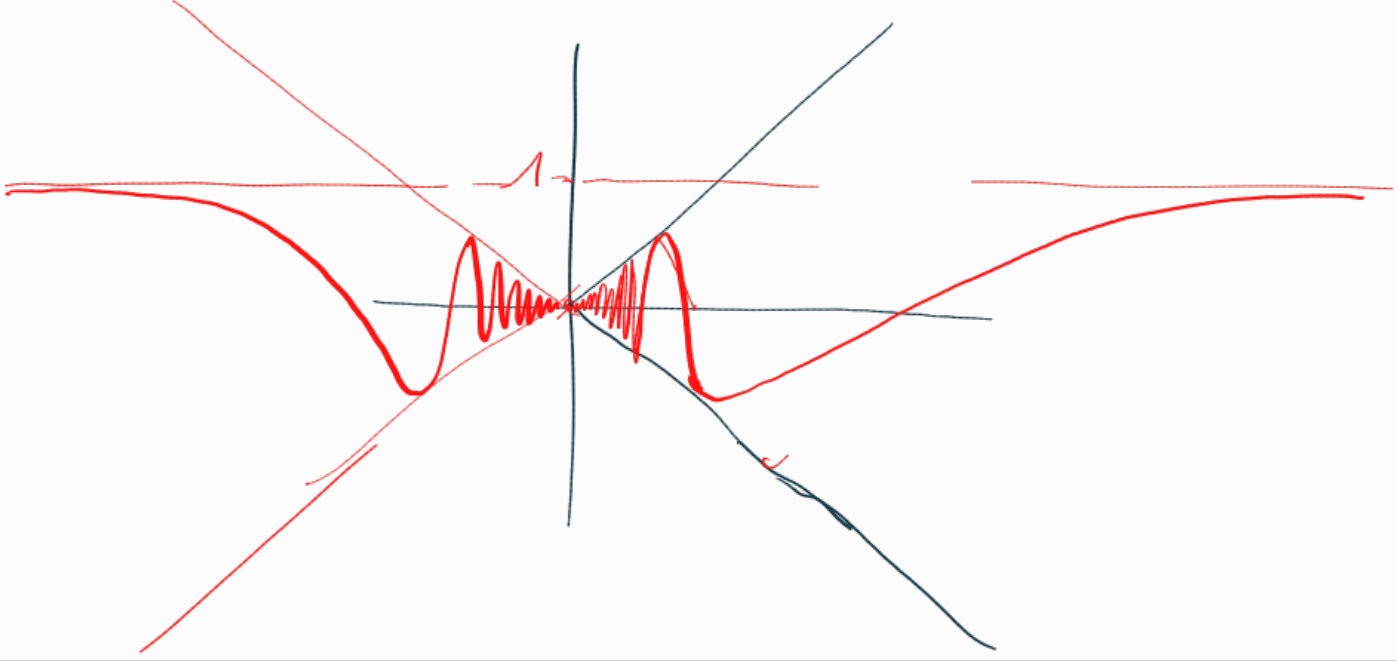
Continuità in $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{?}{=} f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\text{infinitesimo}} \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{limitata}} = 0$$

f è continua anche in $x_0 = 0 \Rightarrow$ continua in tutto $\mathbb{R}$

Com'è fatto il grafico?



Continuità di

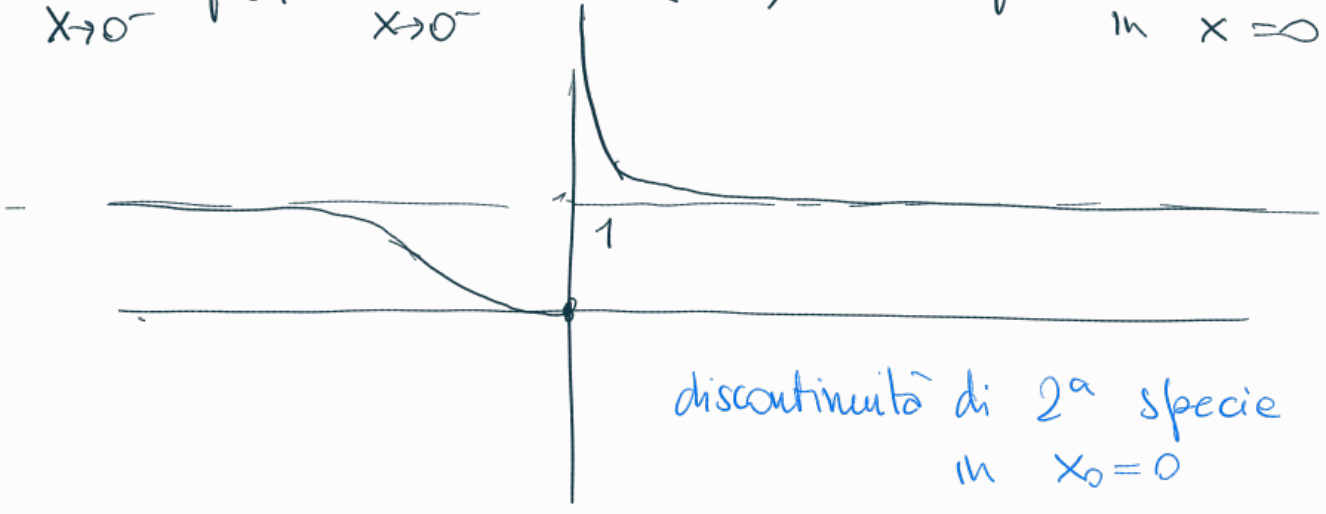
$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f è continua per $x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = (e^{+\infty}) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = (e^{-\infty}) = 0$$

f continua da sinistra in $x = 0$



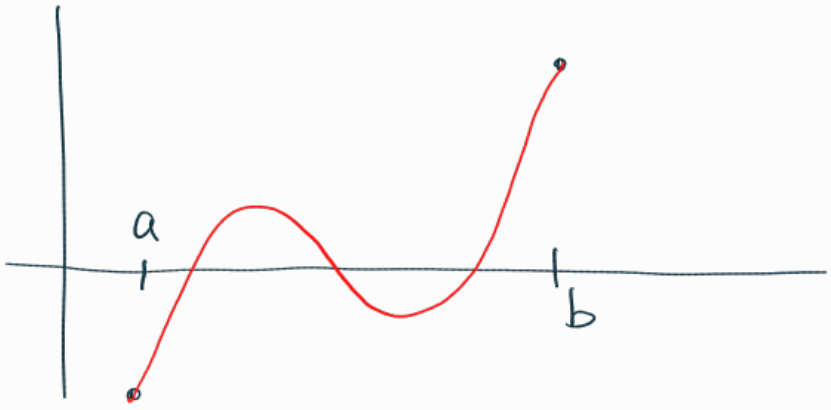
discontinuità di 2ª specie in $x_0 = 0$

TEOREMA di esistenza degli zeri

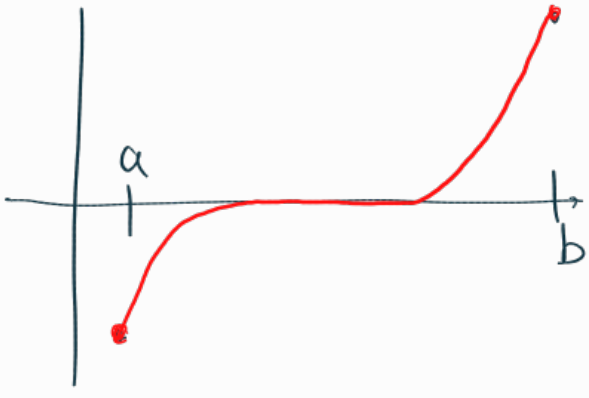
Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$.

Se $f(a)f(b)<0$, cioè $f(a)$ e $f(b)$ hanno segni opposti.

Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c $f(c)=0$

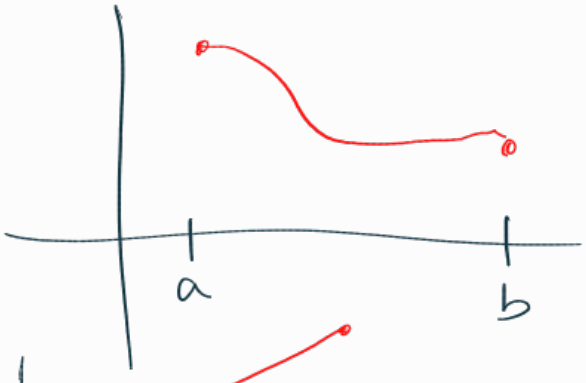


OSS Il pto c non è unico (vedi grafico sopra)

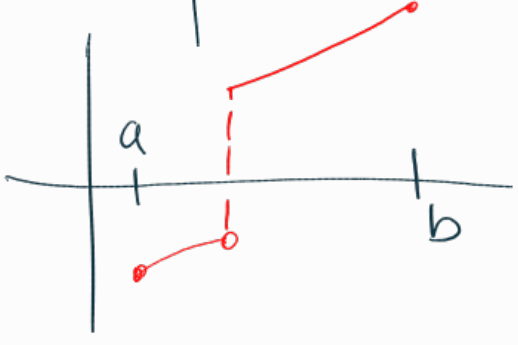


OSS Tutte le ipotesi servono

$f(a)f(b)<0$ serve



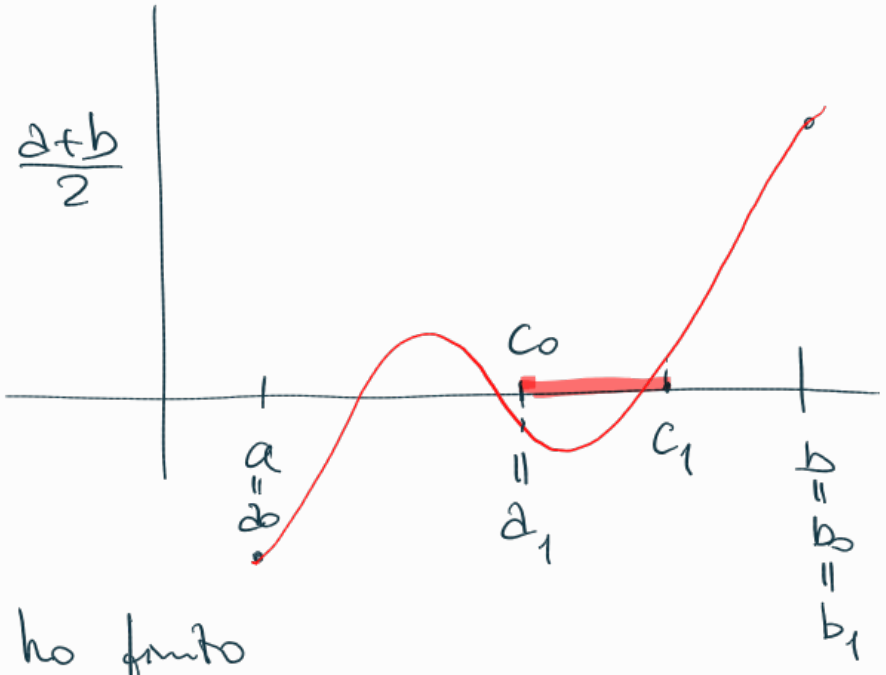
"f continua" serve.



Dim. Supponiamo $f(a) < 0 < f(b)$

Poniamo

$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad c_0 = \frac{a+b}{2}$



$$f(c_0) \begin{cases} = 0 & \Rightarrow \text{ho finito} \\ > 0 & \Rightarrow \text{pongo } a_1 = a_0, \quad b_1 = c_0 \\ < 0 & \Rightarrow \text{pongo } a_1 = c_0, \quad b_1 = b_0 \end{cases}$$

Pongo $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$

$$f(c_1) \begin{cases} = 0 & \Rightarrow \text{ho finito} \\ > 0 & \Rightarrow \text{pongo } a_2 = a_1, \quad b_2 = c_1 \\ < 0 & \Rightarrow \text{pongo } a_2 = c_1, \quad b_2 = b_1 \end{cases}$$

... e continuo così.

due casi:

- o questa procedura finisce, perché a un certo punto trovo un c_n t.c $f(c_n) = 0$.
- oppure questa procedura va avanti all'infinito. In questo caso trovo due succ^{ni} $\{a_n\}, \{b_n\}$ t.c $a_n, b_n \in [a, b]$

a_n crescente , b_n decrescente. $a_n < b_n$

$f(a_n) < 0$ $\qquad$ $f(b_n) > 0$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

$\{a_n\}$ crescente e limitata superiormente
$\Rightarrow \exists\, c'$ t.c. $a_n \to c'$, e $c' \in [a,b]$ (per la permanenza del segno)

$\{b_n\}$ decrescente e limitata inferiormente
$\Rightarrow \exists\, c''$ t.c. $b_n \to c''$, e $c'' \in [a,b]$.

$$\underbrace{b_n - a_n}_{\| \;\; \frac{b-a}{2^n} \to 0} \to c'' - c' \quad \Big| \Rightarrow c' = c'' =: c$$

$f(a_n) \to f(c)$ perché $a_n \to c$
$\wedge$
0

f continua in $c \Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$
+ teor. ponte

$\Rightarrow$ permanenza del segno $\Rightarrow$ $\boxed{f(c) \leq 0}$

$f(b_n) \to f(c) \Rightarrow$ $\boxed{f(c) \geq 0}$ $\Rightarrow$ $f(c) = 0$.
$\vee$
0

□

OSS Questa dimostrazione è costruttiva: costruisco delle successioni a_n, b_n che tendono "rapidamente" a c

Applicazioni: Sia $P(x) = x^6 - x^3 + x^2 - 8$.

Mostrare che $P(x)$ ha uno zero in $(0,2)$ e uno zero in $(-2,0)$.

$P(x)$ è continua su $\mathbb{R}$

$P(0) = -8$

$P(2) = 64 - 8 + 4 - 8 = 52 > 0$.

Applico il teorema a $[0,2] \Rightarrow \exists\, c_1 \in (0,2)$ t.c $P(c_1) = 0$

$P(-2) = +64 + 8 + 4 - 8 = 68 > 0$

Applico il teor. a $[-2,0] \Rightarrow \exists\, c_2 \in (-2,0)$ t.c

$P(c_2) = 0$

Posso trovare per approssimazione c_1.

$P(1) = 1 - 1 + 1 - 8 < 0 \Rightarrow c_1 \in (1,2)$

$P\left(\frac{3}{2}\right) = - - -$

