Esercizio 1.12.2 Semplificare le seguenti espressioni:

a) $\log_3 27$;

b) $\log_2 1/4$;

c) $\log_{1/25} 5$;

d) $\log_{10} 1000000$;

e) $\log_{10} 0{,}00001$;

f) $\log_{25} 5 + \log_{25} 125$;

g) $5^{-4\log_{25}(1/x)}$, $x > 0$;

h) $3^{\log_9 x}$, $x > 0$;

i) $\log_{1/2} 2^{5x}$, $x \in \mathbb{R}$;

j) $\log_{10} \sqrt{10x^2}$, $x \neq 0$;

k) $\log_a \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log_a(x-1)$, $x > 1$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Esercizio 1.12.3 Trovare il dominio naturale delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \dfrac{3 - \log_2 x}{2 + \log_2 x}$;

b) $f(x) = \log_{10}\left(x\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}\right)$;

c) $f(x) = (\log_3(\log_4(x^2-5)))^{-1/4}$;

d) $f(x) = \log_3 \dfrac{x}{x+a}$ $(a \in \mathbb{R})$;

e) $f(x) = \log_3 \dfrac{x^2+a}{x+1}$ $(a \in \mathbb{R})$.

Esercizio 1.12.4 Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni:

a) $9^{5x-2} > 3$;

b) $(1/4)^{-x^2} \geq 2$;

c) $2^{x^2+5x} < 4$;

d) $3^{|x|-2} < 2$;

e) $\log_3(4-x) < -1$;

f) $\log_3 |4-x| < -1$;

g) $\log_3(4-|x|) < -1$;

h) $\log_2\left(1-\sqrt{x-2}\right) < 3$;

i) $\log_5\left(\sqrt{3-x^2}-2\right) > 0$;

j) $\log_4(3x+2) - \log_4(x-3) > 0$;

k) $\log_4((3x+2)/(x-3)) > 0$;

l) $\log_{10}(x^2-7x+11) < 0$;

m) $\log_{1/2} x + \log_{1/2}(|x|-1) \geq 0$;

n) $\log_2(3x+a) > 0$, $a \in \mathbb{R}$;

o) $\log_3(|x|-a) < 0$, $a \in \mathbb{R}$;

p) $\log_{1/2}(1-x^a) < 0$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$;

q) $\log_a(2x-1) > 1$, $a > 0$, $a \neq 1$;

r) $\log_a |x+2| < 0$, $a > 0$, $a \neq 1$;

s) $\log_{1/a}(x^2-3x) \leq -1$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Soluzioni:

1.12.2 **(a)** 3 **(b)** -2 **(c)** $-\frac{1}{2}$ **(d)** 6 **(e)** -5 **(f)** 2 **(g)** x^2 **(h)** $\sqrt{x}$ **(i)** $-5x$ **(j)** $\frac{1}{2} + 2\log_{10}|x|$ **(k)** $\frac{1}{2}\log_a(x+1)$

1.12.3 **(a)** $(0,+\infty)\setminus\{\frac{1}{4}\}$ **(b)** $(2,+\infty)$ **(c)** $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ **(d)** $(-\infty,-a)\cup(0,+\infty)$ se $a>0$, $(-\infty,0)\cup(-a,+\infty)$ se $a<0$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ se $a=0$ **(e)** $(-1,+\infty)$ se $a>0$, $(-1,-\sqrt{-a})\cup(\sqrt{-a},+\infty)$ se $-1<a\leq 0$, $(1,+\infty)$ se $a=-1$, $(-\sqrt{-a},-1)\cup(\sqrt{-a},+\infty)$ se $a<-1$

1.12.4 **(a)** $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ **(b)** $x\in(-\infty,-\frac{1}{2}\sqrt{2}]\cup[\frac{1}{2}\sqrt{2},+\infty)$ **(c)** $x\in\left(\frac{1}{2}(-5-\sqrt{33}),\frac{1}{2}(-5+\sqrt{33})\right)$ **(d)** $x\in(-2-\log_3 2,\,2+\log_3 2)$ **(e)** $x\in(\frac{11}{3},4)$ **(f)** $x\in(\frac{11}{3},\frac{13}{3})\setminus\{4\}$ **(g)** $x\in(-4,-\frac{11}{3})\cup(\frac{11}{3},4)$ **(h)** $x\in[2,3)$ **(i)** $\varnothing$ **(j)** $x\in(3,+\infty)$ **(k)** $x\in(-\infty,-\frac{5}{2})\cup(3,+\infty)$ **(l)** $x\in\left(2,\frac{1}{2}(7-\sqrt{5})\right)\cup\left(\frac{1}{2}(7+\sqrt{5}),5\right)$ **(m)** $x\in\left(1,\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right]$ **(n)** $x\in(\frac{1}{3}(1-a),+\infty)$ **(o)** $\varnothing$ se $a\leq -1$, $x\in(-1-a,1+a)$ se $a\in(-1,0)$, $x\in(-a-1,-a)\cup(a,a+1)$ se $a\geq 0$ **(p)** $\varnothing$ per ogni $a\in\mathbb{R}$ **(q)** $x\in(\frac{1}{2},\frac{1}{2}(a+1))$ se $0<a<1$, $x\in(\frac{1}{2}(a+1),+\infty)$ se $a>1$ **(r)** $x\in(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$ se $0<a<1$, $x\in(-3,-1)\setminus\{-2\}$ se $a>1$ **(s)** $x\in\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9+4a},0\right)\cup\left(3,\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+4a}\right]$ se $0<a<1$, $x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9+4a}\right]\cup\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+4a},+\infty\right)$ se $a>1$