	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$	$x \to x_0^+$	$x \to x_0^-$
infinito	x	$-x$	$\frac{1}{x-x_0}$	$\frac{1}{x_0-x}$
infinitesimo	$1/x$	$-1/x$	$x-x_0$	x_0-x

($x_0 \in \mathbb{R}$)

DEF Diremo che $f(x)$ è infinito/infinitesimo di ordine $\alpha > 0$ per $x \to +\infty, -\infty, x_0^+, x_0^-$ se

$$f(x) \sim l\,(g(x))^\alpha \quad \text{per } x \to +\infty, -\infty, x_0^+, x_0^-$$

dove $g(x)$ è l'infinito/infinitesimo corrispondente nella tabella e $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ è un infinitesimo di ordine 2 per $x \to -\infty$

$$\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(-x)^2} \quad \text{per } x \to -\infty$$

($\frac{1}{x^2} \to 0$)

N.B. Ci sono infiniti/infinitesimi che non hanno ordine

- $f(x) = e^x$ è un infinito di ordine superiore risp. a x^α $\forall \alpha > 0$ per $x \to +\infty$
- $f(x) = \log x$ è un infinito di ordine inferiore risp. a x^α $\forall x > 0$ per $x \to +\infty$
- $f(x) = x \log x$ è un infinito di ordine superiore risp. a x, ma inferiore risp. a x^α $\forall x > 1$ (per $x \to +\infty$)

- $f(x) = x \log x$ è un infinitesimo di ordine inferiore (per $x \to 0^+$) rispetto a x, ma superiore risp. a $x^\alpha \ \forall \alpha \in (0,1)$

se $0 < \alpha < 1$ $\quad \dfrac{x \log x}{x^\alpha} = x^{\overbrace{1-\alpha}^{>0}} \log x \xrightarrow{x \to 0^+} 0$

Esercizio: ordinare i seguenti infinitesimi per $x \to +\infty$

$$f(x) = \operatorname{tg} \underbrace{\frac{x}{2x^2+\sqrt{x}+1}}_{\to 0} \sim \frac{x}{2x^2+\sqrt{x}+1} \sim \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x}$$

$\operatorname{tg} t \sim t$ se $t \to 0$

infinitesimo di ordine 1

$$g(x) = \sqrt{9x^4+5} - 3x^2 =$$

1° modo: si moltiplica e divide per $\sqrt{9x^4+5} + 3x^2$

2° modo:

$$= 3x^2 \left(\sqrt{1+\frac{5}{9x^4}} - 1 \right) \sim$$

$(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t$ per $t \to 0$

$t = \frac{5}{9x^4} \to 0$, $\alpha = 1/2$

$\sqrt{1+\frac{5}{9x^4}} - 1 \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9x^4}$

$$\sim 3x^2 \cdot \frac{5}{18x^4} = \frac{5}{6x^2}$$

infinitesimo di ordine 2

$$h(x) = \frac{1}{\underbrace{2\cos x}_{\text{limitata}} + \underbrace{x^2 \log(2^x+7)}_{\to +\infty}} \sim \frac{1}{x^3 \log 2}$$

infinitesimo di ordine 3.

$$2\cos x + x^2 \log(2^x+7) = x^2 \log(2^x+7) \left(\frac{2\cos x}{x^2 \log(2^x+7)} + 1 \right) \sim$$

$\frac{2\cos x}{x^2 \log(2^x+7)} = o(1)$

$$\sim x^2 \log(2^x+7) = x^2 \log\left(2^x\left(1+\frac{7}{2^x}\right)\right) =$$

$$= x^2\left[\log(2^x) + \underbrace{\log(1+o(1))}_{\| \; o(1)}\right] = x^2\left[\underbrace{x\log 2 + o(1)}_{\sim x\log 2}\right] \sim$$

$$\sim x^3 \log 2$$

$$k(x) = x^{1-\log x} = e^{\overbrace{(1-\log x)\log x}^{\to -\infty}} \to 0.$$

$$\frac{k(x)}{(1/x^\alpha)} = x^\alpha x^{1-\log x} = x^{\alpha+1-\log x} \to 0 \qquad \alpha > 0$$

Quindi è un infinitesimo di ordine superiore a $x^\alpha \; \forall \alpha > 0$

In ordine crescente di infinitesimo:

$$f, g, h, k.$$

Limiti di funzioni monotòne.

Ricordo che, se $\{a_n\}$ è una succ^ne crescente, allora

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup a_n$$

Il seguente teorema dice che succede qualcosa di simile per le funzioni

TEOREMA Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente (decrescente)

(se $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$)

Allora:

1) Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accum. da sinistra di X

(cioè ogni intorno sinistro di x_0 $(x_0-\delta, x_0)$ se $x_0 \in \mathbb{R}$

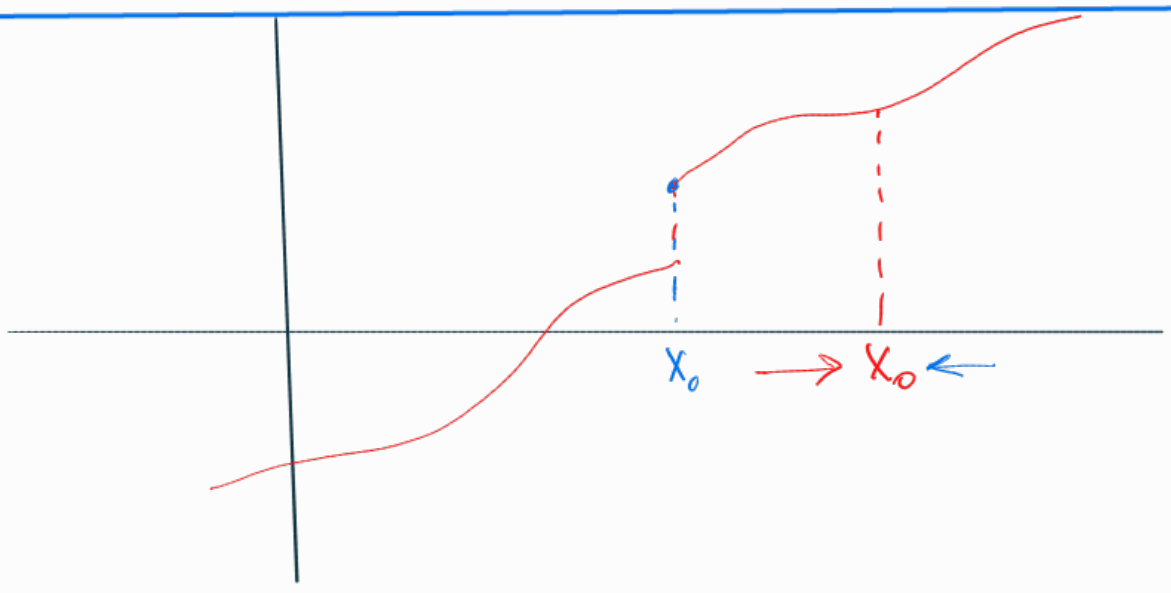
$(M, +\infty)$ se $x_0 = +\infty$

contiene infiniti punti di X)

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x \in X \cap (-\infty, x_0)} f(x)$ $\quad \inf_{x \in X \cap (-\infty, x_0)} f(x)$

2) sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accum. da destra di X.

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x \in X \cap (x_0, +\infty)} f(x)$ $\quad \sup_{x \in X \cap (x_0, +\infty)} f(x)$



Limite di funzione composta (cambio di variabile nei limiti)

$g : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$.

$f : Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Resta definita la funzione composta

$$f \circ g : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup & & \\ x & \longmapsto & f(g(x)) \end{array}$$

Esempio $\sin(x^2)$

$g(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(y) = \sin y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(x^2)$

TEOREMA Siano $g: X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$, $f: Y \to \mathbb{R}$.

Se esistono i limiti $(x_0, \ell, m \in \mathbb{R}^*)$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \quad \text{(Hyp 1)}, \qquad \lim_{y \to \ell} f(y) = m \quad \text{(Hyp. 2)}$$

e inoltre

$$g(x) \neq \ell \quad \text{def}^{\text{te}} \quad \text{per } x \to x_0 \qquad (*)$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to \ell} f(y) = m$$

Dim

Hyp 2 $\Rightarrow$ $\forall\, W$ intorno di m $\exists\, V$ intorno di ℓ t.c. $\forall y \in V \cap Y \setminus \{\ell\}$ si ha $f(y) \in W$

Hyp 1 $\Rightarrow$ $\forall\, V$ intorno di ℓ $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$ si ha $g(x) \in V$

Allora, dato W, trovo V e poi U come dalle precedenti righe

Sia ora $x \in U \cap X \setminus \{x_0\} \Rightarrow g(x) \in V \cap Y \setminus \{\ell\}$

posso richiederlo per l'ipotesi $(*)$ eventualmente restringendo U.

Hyp 1 $\Rightarrow$ $f(g(x)) \in W$.

Abbiamo dim. che $\forall\, W$ intorno di m $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$ si ha $f(g(x)) \in W$

cioè la tesi □

Esempio

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}}$$

oss $g(x)=\frac{1}{x^2} \to +\infty$ per $x\to 0$ (senza assumere il valore $+\infty$)

$f(y)=e^y$

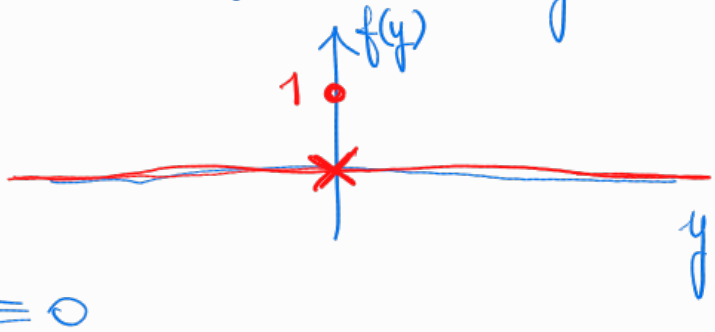
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to +\infty} e^y = +\infty$$

OSS 1 L'hyp (*) serve, altrimenti il teorema è falso.

Esempio facile:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(y)=\begin{cases} 0 & \text{se } y\neq 0 \\ 1 & \text{se } y=0 \end{cases}$$



$g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)\equiv 0$

$$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

(dove $g(x)=0$, quindi $f(g(x))=1$) corretto!

Se invece facessi il cambio di variabile nel limite

quando $x\to 0$ $\quad g(x)\to 0$

$$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = \lim_{\substack{y\to 0 \\ y=g(x)\to 0}} f(y) = 0$$

sbagliato! perché ho usato il teorema senza che fosse vera la (*)

OSS 2 la cond^ne (*) non serve se

$$f(\ell) = \lim_{y \to \ell} f(y)$$

(cioè se f è continua nel pto ℓ).

OSS 3 Il teorema non vale se $\nexists \lim_{y \to \ell} f(y)$.

Esempio

$\nexists \lim_{y \to 0} \frac{1}{y}$ " $f(y)$

$g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(g(x)) = \lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$ corretta

$$\lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{y \to 0} f(y) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{y} \quad \nexists$$

Errata perché il limite di f non esiste.

$y = \frac{1}{x^2} \to 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{y \to 0^+} f(y) = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y} = +\infty$$ corretto.

$y = \frac{1}{x^2} \to 0^+$

Funzioni continue

Def Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in X$.

Se x_0 è pto di accum di X, diremo che f è <u>continua in x_0</u> se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (*)$$

(Se invece x_0 è pto isolato di X, diremo che f è continua in x_0 senza supporre altro)

Diremo f è continua in X se è continua in ogni $x_0 \in X$.

OSS La condizione $(*)$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ si scrive così:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ \forall x \in X$ verificante $|x - x_0| < \delta$

~~$0 <$~~ questa disug non serve!

Esempi di funzioni continue nel loro dominio

$f(x) = x^3$ è continua in $\mathbb{R}$.

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, mi chiedo se $\lim_{x \to x_0} x^3 \stackrel{?}{=} x_0^3$? <u>sì!</u>

Tutte le funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$ sono continue nel loro dominio

$\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad f(x) = \sqrt{x}$ continua in $[0, +\infty)$

$\alpha = \frac{2}{5}$ $\quad f(x) = x^{2/5}$ continua in $\mathbb{R}$.

$\alpha = -1$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$ continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Altre funzioni continue

Logaritmi: $f(x) = \log_b x$ è continua in $(0, +\infty)$ $\forall b > 0,\ b \neq 1$.

Esponenziali: $f(x) = a^x$ è continua in $\mathbb{R}$ $\forall a > 0$.

Funzioni trigonometriche

$\left.\begin{matrix} \sin x \\ \cos x \end{matrix}\right\}$ continue in $\mathbb{R}$

$\tan x$ continua in $\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$f(x) = |x|$ è continua in $\mathbb{R}$.

1° modo: $\lim_{x \to x_0} |x| \stackrel{?}{=} |x_0|$.

a) se $x_0 > 0$, allora $|x| = x$ in un intorno di x_0

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} |x| = \lim_{x \to x_0} x = x_0 = |x_0|$

b) se $x_0 < 0$, allora $|x| = -x$ in un intorno di x_0

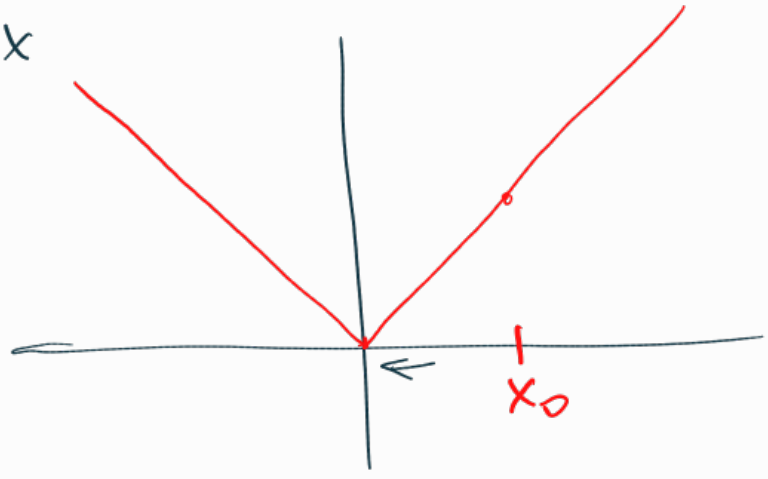
$\Rightarrow$ stessa conclusione

c) se $x_0 = 0$

$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} |x| = 0 = |0|$



2° modo (più sintetico)

$$\lim_{x\to x_0} |x| = |x_0|$$

dis. triangolare per la differenza

$$0 \le \big||x| - |x_0|\big| \le |x - x_0| \to 0$$

Teor. dei carabinieri $\Rightarrow$ $|x| \to |x_0|$

Conseguenze della def^ne di funzione continua.

PERMANENZA del SEGNO

$\lim_{x\to x_0} f(x) \ge 0$

Se f è continua in x_0, e $f(x_0) > 0$, allora esiste un intorno di x_0 in cui f è positiva.

TEOREMA (Aritmetica delle funzioni continue)

Se $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono continue in $x_0 \in X$, allora sono continue in x_0 anche le seguenti funzioni

- $f(x) + g(x)$
- $\alpha f(x) + \beta g(x)$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $f(x) \cdot g(x)$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ se $g(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ $f(x) = \dfrac{x^3 + e^x}{\sin x + 3\log x}$ continua nel suo dominio.

COMPOSIZIONE di funzioni continue.

Siano $g: X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$, $f: Y \to \mathbb{R}$.

(quindi risulta definita $f \circ g : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(g(x))$)

Se g è continua in x_0, e f è continua in $g(x_0)$ allora $f \circ g$ è continua in x_0.

$$f(x) = \frac{(e^x+1)^x}{\sqrt[4]{(x+1)^2+\cos^4 x}}$$ è continua in $\mathbb{R}$