

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \left(\frac{0}{0} \right) = -\frac{1}{2}$$

Non si riesce a risolvere sperando la frazione

$$\frac{\sin x}{x^3} - \frac{\operatorname{tg} x}{x^3} \rightarrow (+\infty - \infty)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$

Non si riesce a risolvere usando gli $o(\cdot)$

$$\sin x = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x) \quad "$$

$$\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \frac{\cancel{x} + o(x) - \cancel{x} + o(x)}{x^3} = \frac{o(x)}{x^3} \rightarrow ??$$

Dobbiamo procedere così:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} &= \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^3} = \frac{\sin x}{x^3} \left(1 - \frac{1}{\cos x} \right) = \\ &= \frac{\sin x (\cos x - 1)}{x^3 \cos x} \sim \frac{-\frac{x^2}{2} x^3}{x^3} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\downarrow$
 1

Ci sono dei limiti che non possiamo ancora fare, perché serve il teorema di De L'Hôpital o il polinomio di Taylor

per es. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \quad \left(= -\frac{1}{6} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\tan x} - 1}{x^3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{2}}{x^3} = -\frac{1}{2}$$

$\rightarrow (1^0) = 1$

$$(\cos x)^{\tan x} - 1 = e^{\tan x \log(\cos x)} - 1 = (*)$$

$$\frac{\tan x}{x} \log(\cos x) \sim -\frac{x^3}{2}$$

$\log(1 + (\cos x - 1))$
 $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$

$$e^t - 1 \sim t \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$\log(1+t) \sim t \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$(*) \sim \tan x \log(\cos x) \sim -\frac{x^3}{2}$$

Confronto di infiniti e infinitesimi

• Ordinare i seguenti infiniti, per $x \rightarrow -\infty$

$$f(x) = \sqrt{1+x^4} \sim x^2$$

$$g(x) = |x|^\pi = (-x)^\pi \quad \text{per } x \rightarrow -\infty$$

$$h(x) = 2^{\sqrt{-x}}$$

$$k(x) = x^2 \log_2(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|^2}{|x|^\pi} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^{\frac{2-\pi}{\delta}} = 0$$

g è un infinito di ordine superiore risp. a f per $x \rightarrow -\infty$

Confrontiamo $f(x)$ e $k(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{k(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2} \log_2(x^2)} = \left(\frac{1}{+\infty} \right) = 0$$

Anche $k(x)$ è infinito di ordine sup. rispetto a $f(x)$

Confrontiamo $g(x)$ e $k(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|^\pi}{x^2 \log_2(x^2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|^{\pi-2}}{2 \log_2|x|} = +\infty$$

↑
potenza positiva
log.

Finora $g > k > f$.

Confrontiamo ora h con g .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{\sqrt{-x}}}{|x|^\pi} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2^{\sqrt{t}}}{t^\pi}$$

-x = |x| = t → +∞

$$s = \sqrt{t} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{2^s}{s^{2\pi}} = +\infty$$

oppure $\frac{2^{\sqrt{t}}}{t^\pi}$ $\sqrt{t}$ più rapidamente di ogni potenza di $\sqrt{t}$, cioè di ogni potenza di t

Quindi $h > g > k > f$ l'ordine è decrescente di ∞ .

Ordinare in ordine crescente di infinitesimo, per $x \rightarrow 0^+$, le seguenti funzioni:

$$f(x) = x \log_2 x \rightarrow 0, \quad g(x) = - \frac{x^{1/3}}{\log_3 x} \rightarrow 0$$

$$h(x) = x^{-10} 2^{-\frac{1}{x}}$$

$$k(x) = \sin x \sim x$$

$$\frac{1}{x} = t \rightarrow +\infty \quad t^{10} / 2^t \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{k(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x} \log_2 x}{\cancel{x}} = -\infty$$

$k(x)$ è infinitesimo di ordine superiore risp. a f .
Confrontiamo g ed f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(- \frac{x^{1/3}}{\log_3 x} \frac{1}{x \log_2 x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2/3} \log_3 x \log_2 x} = -\infty$$

$$\begin{array}{c} \text{"} \\ (x^{1/3} \log_3 x) \cdot (x^{1/3} \log_2 x) \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ 0^- \quad \quad 0^- \end{array}$$

$g(x)$ è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a $f(x)$.

Finora, in ordine crescente di infinitesimo: g, f, k .

$$\text{Proviamo } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^{-10} 2^{-1/x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{11} 2^{1/x} = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \frac{1}{x} = t \rightarrow +\infty}} \frac{2^t}{t^{11}} = +\infty$$

$\Rightarrow h(x)$ è infinitesimo di ordine superiore risp. a $k(x)$
e quindi risp. a tutti gli altri

In ordine crescente di infinitesimo: g, f, k, h .

$$g(x) + f(x) + k(x) + h(x) \sim g(x)$$

per $x \rightarrow 0^+$

$$g(x) + f(x) + k(x) + h(x) = g(x) \left(1 + \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{k(x)}{g(x)} + \frac{h(x)}{g(x)} \right) =$$

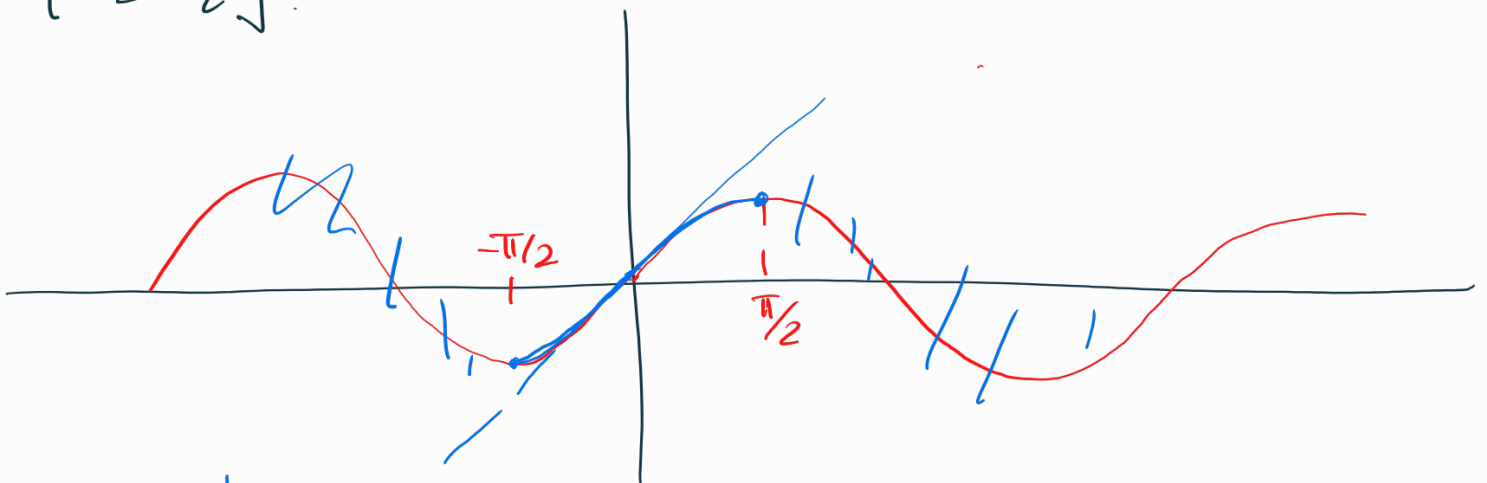
$$= g(x) (1 + o(1)) \sim g(x)$$

$$\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{k(x)} + \frac{1}{h(x)} \sim \frac{1}{h(x)} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

Limiti notevoli che riguardano le funzioni trigonometriche inverse

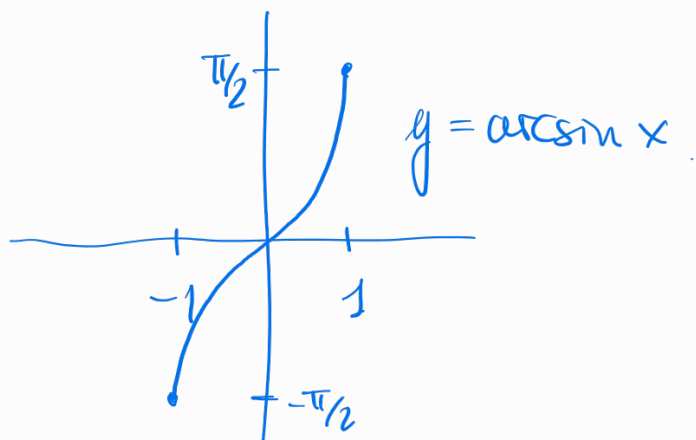
$\arcsin$, $\arccos$, arctg .

$\arcsin$ è la funzione inversa di $\sin x$ ristretta all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



$$\sin x \Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1] \quad \text{bieltas}$$

$$\text{La sua inversa è } \arcsin x : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Vale $\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0 \quad \forall x_0 \in [-1, 1]$

In particolare $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x = \arcsin 0 = 0$.

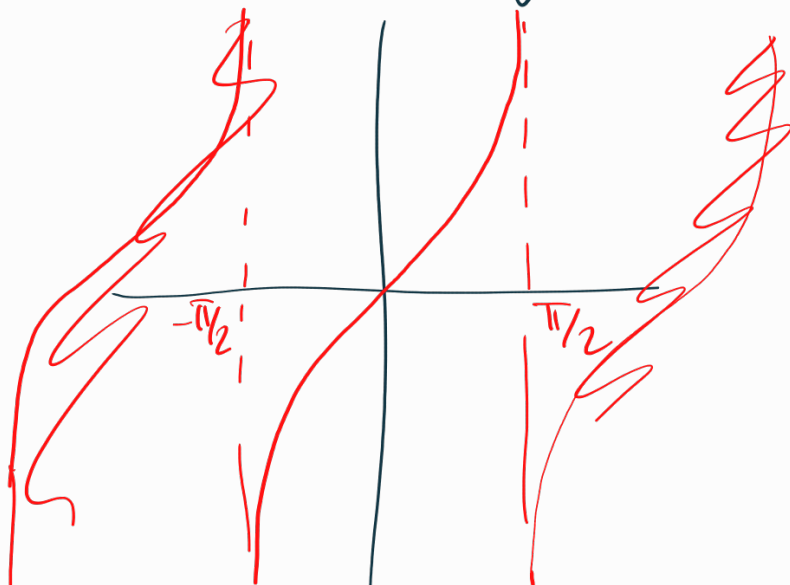
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

$\arcsin x = t \rightarrow 0$
 $x = \sin t$

$$\arcsin x \sim x \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\arcsin x = x + o(x) \quad "$$

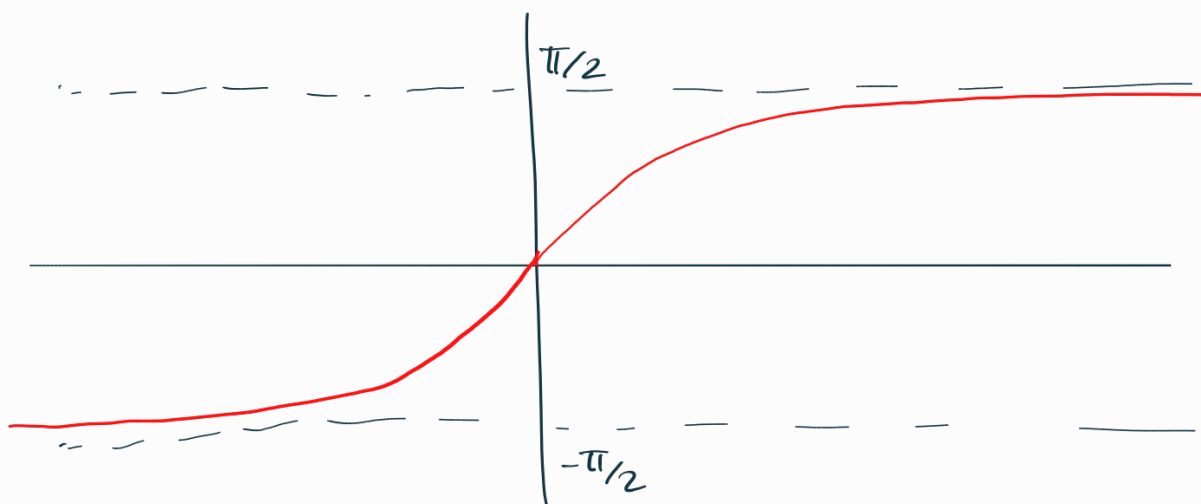
arctg è l'inversa della tg ristretta a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$$\operatorname{tg} \Big|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

La sua inversa si chiama arctg .

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \underline{+\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \underset{\substack{\operatorname{arctg} x = t \rightarrow 0 \\ x = \operatorname{tg} t}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = 1$$

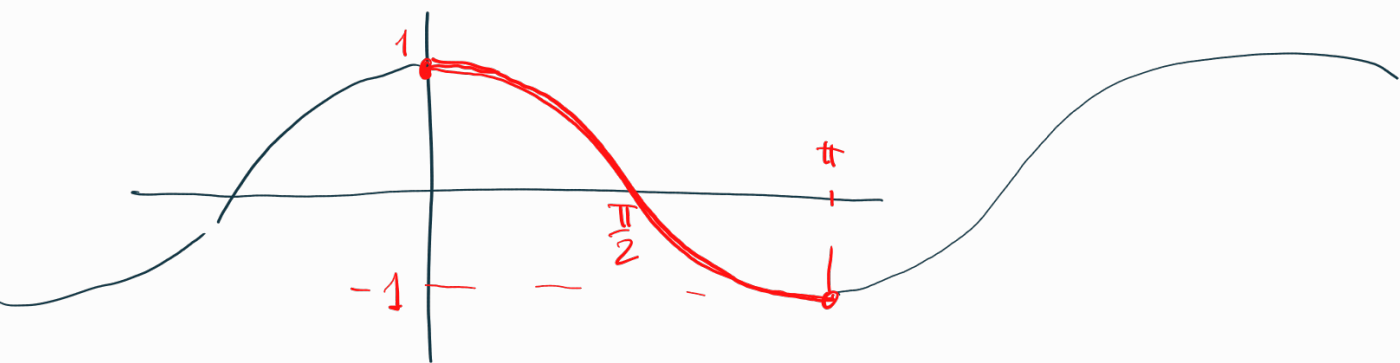
$$\operatorname{arctg} x \sim x$$

per $x \rightarrow 0$

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x)$$

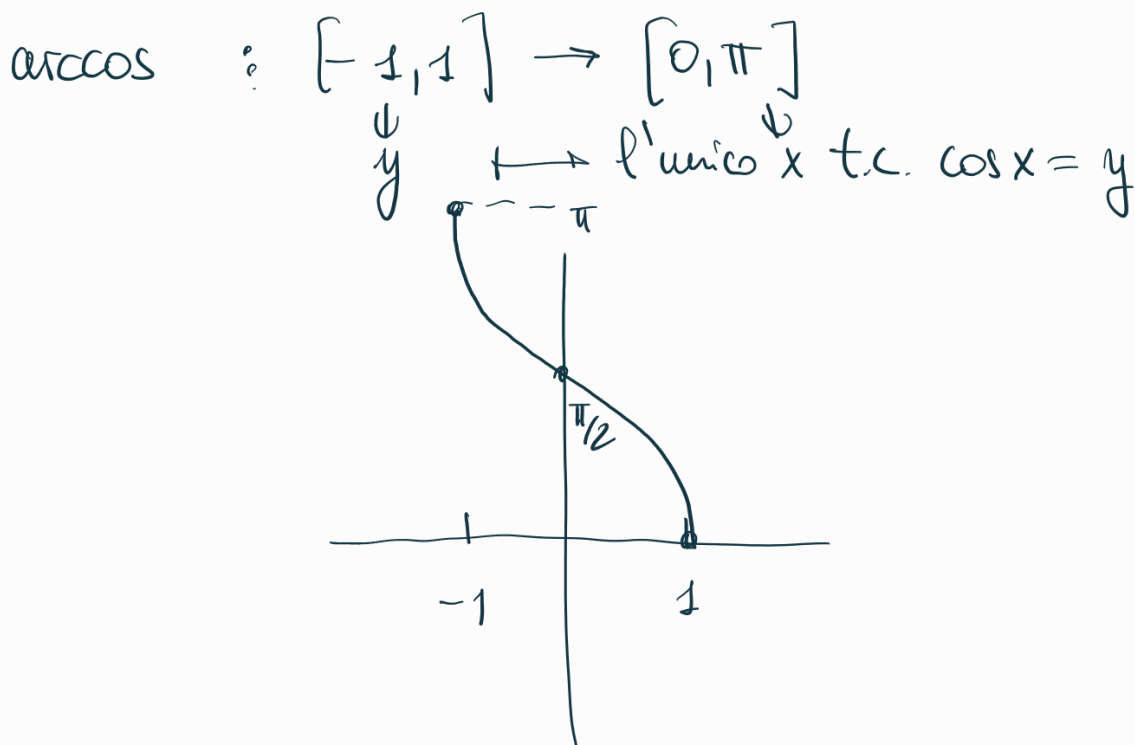
//

L'arccos è l'inversa di $\cos x$ ristretta a $[0, \pi]$.



$\cos|_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ è biettiva.

La sua inversa è arccos.



$\lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0 \quad \forall x_0 \in [-1, 1]$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{(1-x)^{1/2}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{(1-\cos t)^{1/2}} = \sqrt{2}$$

$t = \arccos x \rightarrow 0^+$
 $x = \cos t$

$\sim \frac{t}{\sqrt{2}}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{(1-x)^{1/2}} = \sqrt{2}$$

$$\arccos x \sim \sqrt{2} \sqrt{1-x} \quad \text{per } x \rightarrow 1^-$$

Per esempio

$$\arcsin x + 3x^2 = x \left(\frac{\arcsin x}{x} + 3x \right) = x (1 + o(1))$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x + 3x^2}{x + 2x^4} = \left(\frac{0}{0} \right) = 1$$

Ordine di infiniti e infinitesimi

Vogliamo scegliere degli infiniti/infinitesimi "campione" in varie situazioni

$(x_0 \in \mathbb{R})$

	$x \rightarrow +\infty$	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow x_0^+$	$x \rightarrow x_0^-$
infinito	x	$-x$	$\frac{1}{x-x_0}$	$\frac{1}{x_0-x}$
infinitesimo	$1/x$	$-1/x$	$x-x_0$	x_0-x

DEF Diremo che $f(x)$ è infinito/infinitesimo di ordine $\alpha > 0$ per $x \rightarrow +\infty, -\infty, x_0^+, x_0^-$ se

$$f(x) \sim l (g(x))^\alpha \quad \text{per } x \rightarrow +\infty, -\infty, x_0^+, x_0^-$$

dove $g(x)$ è l'infinito/infinitesimo corrispondente nella tabella e $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Esempi: $1 - \cos x$ è un infinitesimo di ordine 2 per $x \rightarrow 0^+$
 $x \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \text{ per } x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} = \frac{(-x)^2}{2} \text{ per } x \rightarrow 0^-$$

"
 $(-x)^2$

• $\sin x$ è infinitesimo di ordine 1 per $x \rightarrow 0^\pm$

$$\sin x \sim x \text{ per } x \rightarrow 0^\pm$$

• $\frac{1}{x^2+5}$ è un infinitesimo di ordine 2 per $x \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow -\infty$

$$\frac{1}{x^2+5} \sim \frac{1}{x^2} \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

$x \rightarrow -\infty$

• $\underbrace{3x^4 - 2x^3 + 5}_{\sim 3x^4}$ è un infinito di ordine 4 per $x \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow -\infty$

• $\frac{5}{\sqrt[4]{x+7}}$ è un infinitesimo di ordine $\frac{1}{4}$ per $x \rightarrow +\infty$
 $\sim \frac{5}{x^{1/4}}$

• $\log x$ è un infinitesimo di ordine 1 per $x \rightarrow 1^\pm$
 $\log x \approx \log(1 + \underbrace{(x-1)}_{\rightarrow 0}) \sim x-1$ per $x \rightarrow 1^+$

• $\text{arctg } x$ è un infinitesimo di ordine 1

per $x \rightarrow 0^+$

• $\text{arccos } x$ è un infinitesimo di ordine $\frac{1}{2}$

per $x \rightarrow 1^-$

$$\sqrt{2}\sqrt{1-x}$$