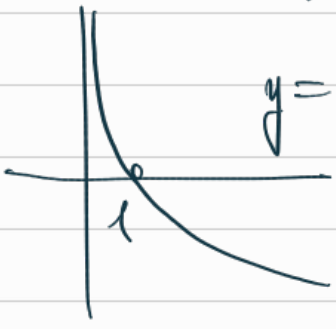
Due lezioni fa avevamo risolto la diseq^ne

$$\cancel{1} < \left(\frac{1}{9}\right)^{2x-3} < \cancel{27}$$

$$\frac{1}{2} \qquad\qquad 28$$

$$\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{9}\right)^{2x-3} < 28 \qquad (*)$$

Si applica alle due disuguaglianze la funzione $\log_{1/9} x$



$y = \log_{1/9} x$ decrescente

(*) equivale a

$$\log_{\frac{1}{9}} 28 < 2x-3 < \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{2}$$

$$\frac{\log_{\frac{1}{9}} 28 + 3}{2} < x < \frac{\log_{1/9} \frac{1}{2} + 3}{2}$$

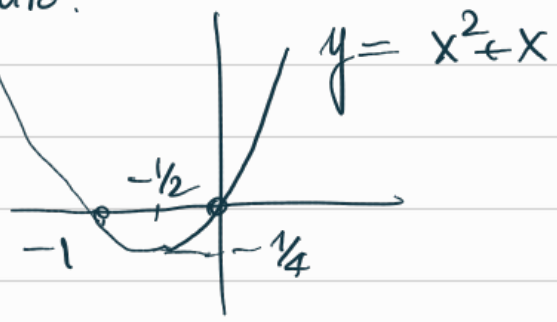
oss $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{2} = -\log_{\frac{1}{9}} 2 = -\frac{\log 2}{\log \frac{1}{9}} = \frac{\log 2}{2\log 3}$

$\log \frac{1}{9} = -2\log 3$

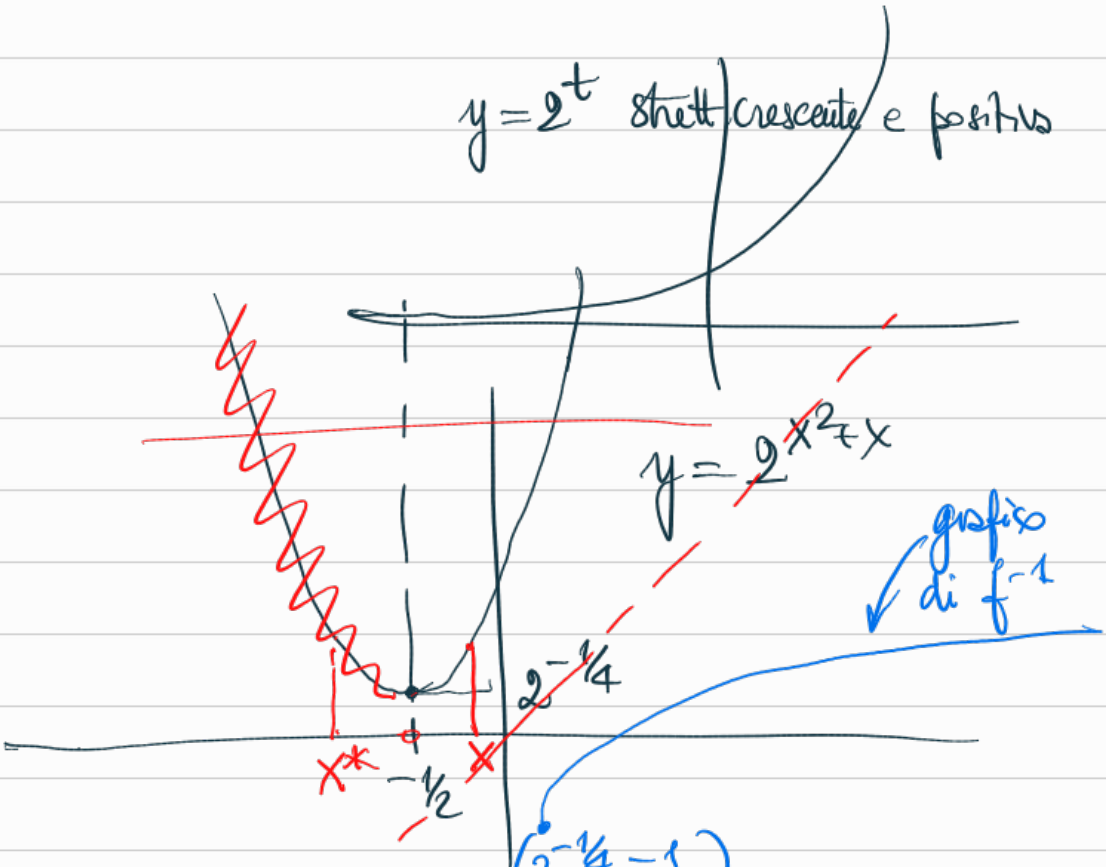
$\log_{\frac{1}{9}} 28 = \ldots$

Disegnare il grafico di $f(x) = 2^{x^2+x}$ e discuterne l'invertibilità.

$y = x^2+x$



$y = 2^{x^2+x}$



La funzione ha un grafico apparentemente simmetrico rispetto alla retta verticale $x = -\frac{1}{2}$

Come si verifica?

la sua traslata $g(x) = f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ è pari?

$$g(x) = f\left(x-\frac{1}{2}\right) = 2^{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + x - \frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{x^2 - x + \frac{1}{4} + x - \frac{1}{2}} = 2^{x^2 - \frac{1}{4}}$$

è pari?

sì perché dipende da x^2.

In alternativa (vedi grafico) vedo se $f(x^*) = f(x)$

x^* è il simmetrico di x rispetto a $x_0 = -\frac{1}{2}$

$$\frac{x^* + x}{2} = -\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x^* = -x - 1$$

$$f(-x-1) \stackrel{?}{=} f(x)$$

$$2^{(-x-1)^2 - x - 1} \stackrel{?}{=} 2^{x^2+x}$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{2x} + \cancel{1} \cancel{- x} \cancel{- 1} = \cancel{x^2} + \cancel{x}$$

$$f(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2^{x^2+x}$$

è suriettiva? NO, ma lo diventa se sostituisco l'insieme di arrivo con $[2^{-1/4}, +\infty)$.

è iniettiva? NO, ma lo diventa restringendo il dominio a $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ oppure $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

scegliamo questo.

$$f(x) = 2^{x^2+x} : \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \longrightarrow [2^{-1/4}, +\infty)$$

è suriettiva? sì perché è continua in un intervallo
$\Rightarrow$ ammette tutti i valori tra
$\min f = 2^{-1/4}$ e $\sup f = +\infty$

Resta definita la funzione inversa

$$f^{-1}: \left[2^{-1/4}, +\infty\right) \longrightarrow \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$y \mapsto f^{-1}(y) = \text{l'unico } x \text{ t.c. } f(x) = y$$

$$2^{x^2+x} = y$$

$$x^2 + x = \log_2 y$$

$$x^2 + x - \log_2 y = 0$$

Risolvo in x

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\log_2 y}}{2}$$

scelgo il "+" perché $x \geq -\frac{1}{2}$.

oss $\quad 1 + 4\log_2 y \geq 0$

$$\log_2 y \geq -\frac{1}{4}$$

$$y \geq 2^{-1/4} \quad \text{vero}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 4\log_2 y}\right)$$