

Limiti notevoli che coinvolgono e.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Dim segue dal teorema ponte.

Sappiamo che se $a_n \rightarrow \pm\infty$, allora $\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \rightarrow e$
teor. ponte $\rightarrow$ la tesi □

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Dim $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a} \cdot a} =$

Pongo $y = \frac{x}{a} \rightarrow \pm\infty$ ($+\infty$ se $a > 0$, $-\infty$ se $a < 0$)

$$= \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^a = e^a$$

Questo funziona se $a \neq 0$, ma il caso $a = 0$ è banale.
Il limite $x \rightarrow -\infty$ è uguale.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^{x+1} \right]^{\frac{x^2}{x+1}} =$$

$\downarrow$ $e^{-2} < 1$ $\downarrow$ $+\infty$

$$= (e^{-2})^{+\infty} = 0$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} =$$

$$\frac{1}{x} = y \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{1/x} =$$

$$\frac{1}{x} = y \rightarrow -\infty$$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log(1+x) = 1$$

Infatti

$$\frac{1}{x} \log(1+x) = \log((1+x)^{1/x}) \rightarrow \log e = 1$$

Si esprime anche così:

$$\log(1+x) \sim x$$

per $x \rightarrow 0$

$$\log(1+x) = x (1 + o(1))$$

//

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

//

$$\log t \sim t-1$$

per $t \rightarrow 1$

OSS Se la base del logaritmo è diversa, il risultato cambia

$$\log_2(1+x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} \sim \frac{x}{\log 2} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

e in generale

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\log a}$$

per $x \rightarrow 0$
 $\forall a > 0, a \neq 1$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

dim

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} \stackrel{(4)}{=} 1$$

$$\begin{aligned} y &= e^x - 1 \rightarrow 0 \\ e^x &= 1 + y \\ x &= \log(1+y) \end{aligned}$$

Il limite (5) si scrive anche

$$e^x - 1 \sim x \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$e^x - 1 = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad "$$

Invece si scrive $e^x \sim 1+x$ per $x \rightarrow 0$

l'unica informazione è che $e^x \rightarrow 1$, "

infatti è vero anche

$$e^x \sim 1 + \sqrt[3]{x} \quad "$$

$$5') \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad \forall a > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a} \right] \log a$$

deve essere $a \neq 1$

Ma il caso $a=1$ è banale

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0}$$

$$\frac{e^{\alpha \log(1+x)} - 1}{\alpha \log(1+x)}$$

$$\frac{e^t - 1}{t} \quad t \rightarrow 0$$

$$= \alpha$$

$$\frac{\alpha \log(1+x)}{x} \stackrel{(5)}{=} 1$$

Il limite (6) si scrive anche

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

per $x \rightarrow 0$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

"

Riprendiamo un vecchio esercizio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x \right)$$

1° modo (già visto): ricordiamo che $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x &= \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x \right) \cdot \left[\left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} \right)^2 + x \sqrt[3]{x^3 + 2x^2} + x^2 \right]}{\left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} \right)^2 + x \sqrt[3]{x^3 + 2x^2} + x^2} \\ &= \frac{\cancel{(x^3 + 2x^2)} - \cancel{x^3}}{\left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} \right)^2 + x \sqrt[3]{x^3 + 2x^2} + x^2} = \frac{\cancel{2x^2}}{\cancel{x^2} (3 + o(1))} \rightarrow \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2° modo $\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x = x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} - 1 \right) \sim x \cdot \frac{2}{3x} = \frac{2}{3}$

ricordiamo che $(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t$ per $t \rightarrow 0$
 $\alpha = 1/3 \Rightarrow (1+t)^{1/3} - 1 \sim \frac{t}{3}$

$$\Rightarrow \left(1 + \underbrace{\frac{2}{x}}_{t \rightarrow 0} \right)^{1/3} - 1 \sim \frac{2}{3x}$$

per $x \rightarrow +\infty$

Supponiamo ora

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[8]{X^8 + 2X^7} - X \right) = \frac{1}{4}$$

1° modo

$$A^8 - B^8 = (A - B)(A^7 + A^6B + A^5B^2 + A^4B^3 + \dots + B^7)$$

$$\left(\sqrt[8]{X^8 + 2X^7} - X \right) \left((X^8 + 2X^7)^{7/8} + X(X^8 + 2X^7)^{6/8} + \dots \right)$$

etc...

2° modo

$$\sqrt[8]{X^8 + 2X^7} - X = X \left(\sqrt[8]{1 + \frac{2}{X}} - 1 \right) \sim X \frac{1}{4X} = \frac{1}{4}$$

oss $(1+t)^{1/8} - 1 \sim \frac{t}{8}$ per $t \rightarrow 0$

$t = \frac{2}{X} \rightarrow 0$ $\left(1 + \frac{2}{X}\right)^{1/8} - 1 \sim \frac{2}{8X} = \frac{1}{4X}$ per $X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\frac{X + \alpha}{X - \alpha} \right)^X = (1^{-\infty}) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$= \lim_{X \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2\alpha}{X - \alpha} \right)^{X - \alpha} \left(1 + \frac{2\alpha}{X - \alpha} \right)^{\alpha} = e^{2\alpha} \cdot 1$$

$\downarrow$ $e^{2\alpha}$ $\downarrow$ 1

In alternative

$$\left(\frac{x+\alpha}{x-\alpha}\right)^x = \left(\frac{\cancel{x} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}{\cancel{x} \left(1-\frac{\alpha}{x}\right)}\right)^x = \frac{\overset{\rightarrow e^\alpha}{\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x}}{\underbrace{\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)^x}_{\rightarrow e^{-\alpha}}} \rightarrow e^{2\alpha} \quad x \rightarrow \infty$$

oppure:

$$\left(\frac{x+\alpha}{x-\alpha}\right)^x = e^{x \log\left(\frac{x+\alpha}{x-\alpha}\right)} \xrightarrow{2\alpha} e^{2\alpha}$$

$$\log \frac{\overset{-\alpha+\alpha}{x+\alpha}}{x-\alpha} = \log\left(1 + \underbrace{\frac{2\alpha}{x-\alpha}}_{\downarrow 0}\right) \sim \frac{2\alpha}{x-\alpha} \sim \frac{2\alpha}{x}$$

$$\log(1+t) \sim t \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow x \log\left(\frac{x+\alpha}{x-\alpha}\right) \sim x \cdot \frac{2\alpha}{x} = 2\alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\log(5e^{x-4} - x) - \sin(3x-12)}{x-4} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Poniamo $x-4=t \rightarrow 0^+$ $x=4+t$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log(5e^t - 4 - t) - \sin(3t)}{t} =$$

$$\left[\text{Num} \quad \log(\underbrace{5e^t}_{\downarrow 1} - \underbrace{4-t}_{\downarrow 0}) = \log(1 + \underbrace{5e^t - 5 - t}_{\downarrow 0}) \sim \right]$$

$$\sim 5e^t - 5 - t \quad \sim 5e^t - 5 - t$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{\log(5e^t - 4 - t)}{t} - \frac{\sin(3t)}{t} \right] = 4 - 3 = 1$$

$$\frac{5e^t - 5 - t}{t} \rightarrow 5 \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) - 1 \rightarrow 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan^3 x} - 1}{x (\cos x - e^{x^2})} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{-\frac{3}{2}x^3} = -\frac{2}{3}$$

NUM

$$e^{\tan^3 x} - 1 \sim \tan^3 x \sim x^3$$

$$e^t - 1 \sim t \text{ per } t \rightarrow 0$$

NB

~~$$e^{\tan^3 x} - 1 \sim e^{x^3} - 1 \sim x^3$$~~

(non del tutto corretto)

qui ho sostituito una funzione asint. equivalente nell'esponenziale

Den

$$\cos x - e^{x^2} = (\cos x - 1) + (1 - e^{x^2}) =$$

$$= x^2 \left[\frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1 - e^{x^2}}{x^2} \right] \sim -\frac{3}{2}x^2$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $-1/2$ -1
 $\downarrow$
 $-\frac{3}{2}$

$$\text{Den} = x (\cos x - e^{x^2}) \sim -\frac{3}{2}x^3$$

OSS Il numeratore si poteva anche fare così:

$$\cos x - e^{x^2} = \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1} - x^2 + \cancel{o(x^2)} = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\sim -\frac{3}{2}x^2$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

$$e^t = 1 + t + o(t) \quad t \rightarrow 0$$

$$t = x^2 \rightarrow 0$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{2n}{3n^2+5}\right)}_{\frac{2n}{3n^2+5} \sim \frac{2}{3n}} \underbrace{(n+7)}_{\sim n} = (0 \cdot +\infty) = \frac{2}{3}$$

$\sin t \sim t$ per $t \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+5) \cos \left(\frac{\pi(n^2+1)}{2n^2+n} \right) = (+\infty \cdot 0) = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

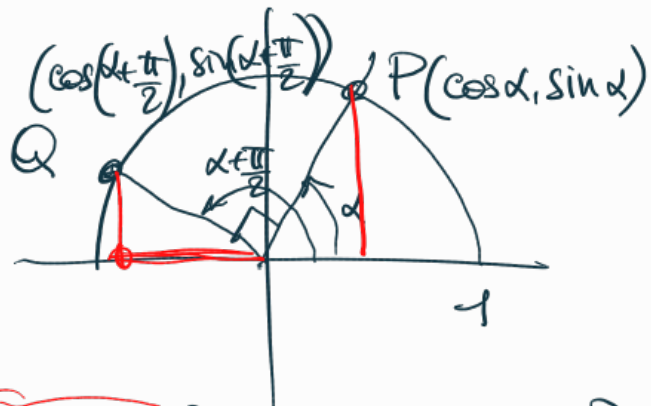
$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2n & & \pi/2 & & \sim \frac{\pi}{4n} \\ \downarrow & & & & \\ +\infty & & 0 & & \end{matrix}$

Con che velocità il coseno va a zero quando il suo arg. va a $\frac{\pi}{2}$.

$$\cos \frac{\pi(n^2+1)}{2n^2+n} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2-n)}{2(2n^2+n)} \right) = -\sin \frac{\pi(2-n)}{2(2n^2+n)}$$

$$\frac{\pi(n^2+1)}{2n^2+n} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi n^2 + 2\pi - 2\pi n^2 - n\pi}{2(2n^2+n)} = \frac{\pi(2-n)}{2(2n^2+n)}$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha$$



$$\cos \frac{\pi(n^2+1)}{2n^2+n} = -\sin \left(\frac{\pi(2-n)}{2(2n^2+n)} \right) \sim -\frac{\pi(2-n)}{2(2n^2+n)} \sim \frac{\pi}{4n}$$

$\downarrow$
 0