

CONFRONTO TRA INFINITI

DEF $f(x), g(x)$ t.c. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$ ($x_0 \in \mathbb{R}^*$)

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$. Diremo che

f è un **infinito di ordine superiore a g** per $x \rightarrow x_0$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \quad \left(\text{cioè} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty \right)$$

Cioè se $g(x) = o(f(x))$ per $x \rightarrow x_0$

CONFRONTO TRA INFINITESIMI

DEF Siano $f(x), g(x)$ t.c. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

t.c. $f(x), g(x) \neq 0$ def^{te} per $x \rightarrow x_0$.

Diremo che **f è infinitesimo di ordine superiore risp. a g** se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \left(\text{cioè} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| = +\infty \right),$$

cioè $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

OSS f infinito di ordine sup. risp. a g $\Leftrightarrow g(x) = o(f(x))$ per $x \rightarrow x_0$

f infinitesimo di ordine sup. risp. a g $\Leftrightarrow f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

Diremo anche che f e g sono **infiniti/infinitesimi dello stesso ordine** per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^*$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

cioè se $f(x) \sim l g(x)$ per $x \rightarrow x_0$

Esempi:

x^2 è infinito di ordine **inferiore** risp a x^3 per $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0$$

x^2 è infinitesimo di ordine **inferiore** risp. a x^3 per $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^2}{x^3} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = +\infty$$

OSS $x^2 + x^3 \sim x^3$ per $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ x^3 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \sim \\ \underbrace{\hspace{1cm}} \\ \downarrow 1 \end{array}$$

$$x^2 + x^3 \sim x^2 \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ x^2 (1 + x) \sim \\ \underbrace{\hspace{1cm}} \\ \downarrow 1 \end{array}$$

Più in generale, se $f(x)$ è infinito di ordine sup. rispetto a $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$, si ha

$$f(x) + g(x) \sim f(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se $f(x)$ è infinitesimo di ordine sup. risp. a $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$,

$$f(x) + g(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

$$g(x) \left(1 + \frac{f(x)}{g(x)} \right)$$

↓

In generale, se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

$$f(x) + g(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

$$g(x) \left(1 + \frac{f(x)}{g(x)} \right)$$

Confronto tra infiniti/infinitesimi.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \begin{matrix} \forall b > 1 \\ \forall \alpha > 0 \end{matrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

cioè b^x è un infinito di ordine superiore risp. a x^α per $x \rightarrow +\infty$
 $\forall b > 1, \quad \forall \alpha > 0$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha b^x = 0 \quad \forall b > 1 \\ \forall \alpha > 0$$

cioè

b^x è un infinitesimo di ordine inferiore risp a $\frac{1}{|x|^\alpha}$ per $x \rightarrow -\infty$
 $\nwarrow b > 1$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0 \quad \forall b > 0, b \neq 1 \\ \forall \alpha > 0$$

Dim Abbiamo provato che se $a_n \rightarrow +\infty$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_b a_n}{(a_n)^\alpha} = 0 \quad \forall b > 0, b \neq 1 \\ \forall \alpha > 0.$$

Teor. ponte $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0$$

In termini di infiniti:

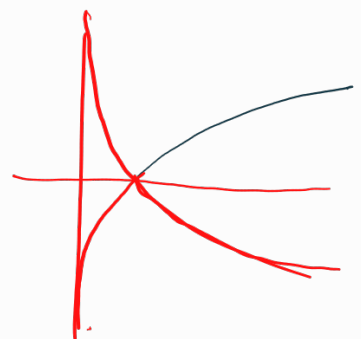
$\log_b x$ è un infinito di ordine inferiore risp. a x^α per $x \rightarrow +\infty$
 se $\alpha > 0$

$$3') \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\log_b x|^\gamma}{x^\alpha} = 0 \quad \forall b > 0, b \neq 1 \\ \forall \gamma \in \mathbb{R} \\ \forall \alpha > 0$$

(ovvero se $\gamma \leq 0$)

$$\boxed{\gamma \geq 0}$$

$$\left| \frac{\log_b x}{x^{\alpha/\gamma}} \right|^\gamma \rightarrow 0^\gamma = 0$$



$$4) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log_b x = 0$$

$$\forall b > 0, b \neq 1$$

$$\forall \alpha > 0$$

$$\parallel \frac{1}{x} = y \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^\alpha} \log_b \frac{1}{y} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log_b y}{y^\alpha} = 0$$

$$\parallel -\log_b y$$

$\log_b x$ è un infinito di ordine inferiore risp. a $\frac{1}{x^\alpha}$ per $x \rightarrow 0^+$
 $\forall \alpha > 0$.

$$4') \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\log_b x|^\gamma = 0$$

$$\forall b > 0, b \neq 1$$

$$\forall \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\forall \alpha > 0$$

dim. per esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x} = (0)^{+\infty} = 0$$

$$\parallel e^{\frac{1}{x} \log x} \rightarrow 0$$

$$\begin{matrix} +\infty & -\infty \\ \downarrow & \downarrow \\ -\infty & \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = (0^0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\underbrace{x \log x}_0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\sqrt{\log x}}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\log x}}{e^{\sqrt{\log x}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\log x - \sqrt{\log x}} = +\infty$$

OSS $\log x - \sqrt{\log x} = \sqrt{\log x} (\sqrt{\log x} - 1) \rightarrow +\infty$

Limiti notevoli

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = 1$

Si può scrivere anche nei seguenti modi

$$\sin x \sim x \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\sin x = x (1 + o(1)) \quad //$$

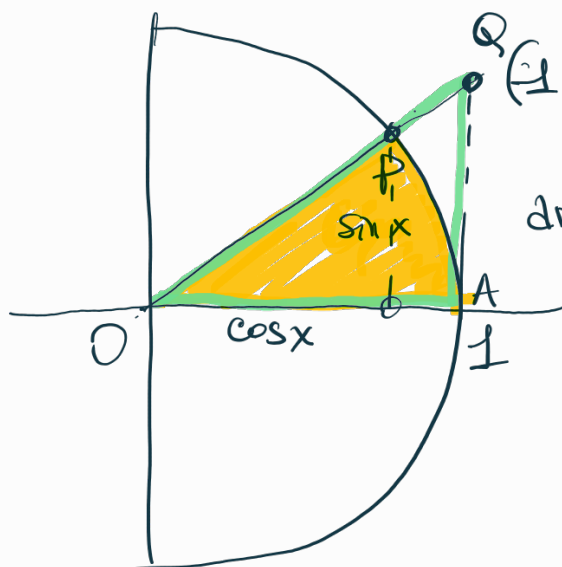
$$\sin x = x + \underbrace{x o(1)}_{o''(x)} = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

OSS $x o(1) = o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$

$$\frac{x o(1)}{x} = o(1) \rightarrow 0$$

Lemma $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$

$$\sin x \leq x \leq \tan x \quad \textcircled{2}$$



$$\text{area sett. circ. OPA} \leq \text{area } \triangle OAQ$$

$$\frac{x^2}{2} \leq \frac{\tan^2 x}{2}$$

$$\Rightarrow x \leq \tan x$$

$$\frac{\text{area sett. circ.}}{\text{area del cerchio}} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\text{area sett. circ.} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi = \frac{\alpha}{2}$$

Dim limite. $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\sin x \leq x \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\Downarrow$ divido per $\sin x > 0$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

passo ai reciproci

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$x \rightarrow 0 \quad \downarrow$
1

lim. dei cos. $\Rightarrow \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad \square$

Abbiamo provato che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

ma $\frac{\sin x}{x}$ è una f. pari $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\Rightarrow$ la tesi.

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Si può anche scrivere così:

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

per $x \rightarrow 0$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} (1 + o(1))$$

//

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^2}{2} o(1) \right) + o(x^2)$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0}$$

$(\cos x)^2 = \cos^2 x$

Dim

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \frac{1}{2} \quad \square$$

$\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \rightarrow 1 \quad \downarrow 2$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = 1$$

si scrive anche

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &\sim x && \text{per } x \rightarrow 0 \\ \operatorname{tg} x &= x (1 + o(1)) \\ \operatorname{tg} x &= x + o(x) \end{aligned}$$

Dim

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x} \rightarrow 1$$

$\downarrow 1 \quad \downarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = -2$$

Modo lungo

$$\frac{x \sin x}{\cos x - 1} \rightarrow -2 \quad \text{oss} \quad \frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

Diagram showing the limit process with annotations: $x \sin x$ is circled in red and labeled $\sim x$, $\cos x - 1$ is circled in blue and labeled $\sim -\frac{x^2}{2}$. Arrows indicate the resulting limit values -2 and $-\frac{1}{2}$.

Più sinteticamente

$$\frac{x \sin x}{\cos x - 1} \sim \frac{x^2}{(-\frac{x^2}{2})} = -2$$

Diagram showing the limit process with annotations: $x \sin x$ is circled in red and labeled $\sim x$, $\cos x - 1$ is circled in red and labeled $\sim -\frac{x^2}{2}$. Arrows indicate the resulting limit value -2 .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - \sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = 1$$

1° modo

$$\frac{\lg x - \sin^2 x}{x} = \frac{\lg x}{x} - \frac{\sin^2 x}{x} \rightarrow 1$$

Diagram showing the limit process with annotations: $\frac{\lg x}{x}$ is circled in red and labeled $\rightarrow 1$, $\frac{\sin^2 x}{x}$ is circled in red and labeled $\rightarrow 0$. Arrows indicate the resulting limit value 1 .

2° modo

$$\lg x - \sin^2 x = x \left(\frac{\lg x}{x} - \frac{\sin^2 x}{x} \right) \sim x$$

Diagram showing the limit process with annotations: $\frac{\lg x}{x}$ is circled in red and labeled $\rightarrow 1$, $\frac{\sin^2 x}{x}$ is circled in red and labeled $\rightarrow 0$. Arrows indicate the resulting limit value 1 .

$$\frac{\lg x - \sin^2 x}{x} \sim \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos x}{\sin(x^2) - 3\sin x - x^2} = 0$$

Num $2 - 2\cos x = 2(1 - \cos x) \sim x^2$ per $x \rightarrow 0$

Den. $\underbrace{\sin(x^2)}_{\sim x^2} - \underbrace{3\sin x}_{\sim -3x} - x^2 =$

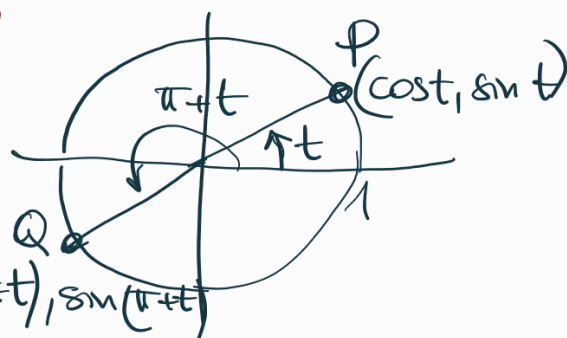
$$= x \left(\underbrace{\frac{\sin(x^2)}{x}}_{\rightarrow 0} - 3 \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\rightarrow 1} - \underbrace{\frac{x^2}{x}}_{\rightarrow 0} \right) \sim -3x$$

$\underbrace{\quad \quad \quad}_{\rightarrow -3}$

$$\frac{\text{Num}}{\text{Den}} \sim \frac{x^2}{-3x} = -\frac{x}{3} \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + t)}{t} = (*)$$

Idea: pongo $x - \pi = t \rightarrow 0$
 $x = \pi + t$



$$\sin(\pi + t) = -\sin t \quad (\cos(\pi + t), \sin(\pi + t))$$

$$(*) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-\sin t)}{t} = -1$$

