TEOREMA "ponte" tra limiti di successioni e di funzioni

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ell, x_0 \in \mathbb{R}^*$, x_0 pto di accum di X.

Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \text{ succ}^{ne} \{a_n\} \text{ a valori in } X \setminus \{x_0\} \text{ t.c. } \lim_{n \to +\infty} a_n = x_0 \text{ si ha } \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \ell.$$

Dim $\Rightarrow$

Sappiamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff$

$\forall V$ intorno di ℓ $\exists U$ intorno di x_0 t.c.

$$\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\} \text{ si ha } f(x) \in V \qquad (*)$$

Sia ora $a_n \in X \setminus \{x_0\}$ t.c. $a_n \to x_0$.

Fissato U intorno di x_0 (lo stesso di prima) si ha

def^{te} $a_n \in U \cap X \setminus \{x_0\} \underset{(*)}{\Longrightarrow}$ def^{te} $f(a_n) \in V$

cioè $\forall V$ intorno di ℓ def^{te} $f(a_n) \in V$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \ell$. $\square$

Dim $\Leftarrow$ Sappiamo che $\forall a_n \in X \setminus \{x_0\}$ t.c. $a_n \to x_0$ si ha $f(a_n) \to \ell$.

Dobbiamo provare che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Per assurdo supponiamo che ciò sia falso.

$\neg$ ($\forall V$ intorno di ℓ $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V \quad \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$)

negazione

$\exists V$ intorno di ℓ t.c. $\neg$ ($\exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V \quad \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$)

$\exists V$ intorno di ℓ t.c $\forall U$ intorno di x_0 $\exists x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$ verificanti $f(x) \notin V$

Da questo momento V è fissato.

Prendiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ per semplicità (fare il caso $x_0 = \pm\infty$ da soli).

Prendiamo $U_1 = (x_0 - 1, x_0 + 1)$

$\exists a_1 \in U_1 \cap X \setminus \{x_0\}$ t.c. $f(a_1) \notin V$

Sia ora $U_2 = \left(x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}\right)$

$\exists a_2 \in U_2 \cap X \setminus \{x_0\}$ t.c $f(a_2) \notin V$

$\vdots$

al passo n-esimo prendo $U_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$

$\exists a_n \in U_n \cap X \setminus \{x_0\}$ t.c. $f(a_n) \notin V$

In questo modo costruiamo una succ^{ne}

$a_n \in X \setminus \{x_0\}$, $a_n \in U_n \Rightarrow |a_n - x_0| < \frac{1}{n} \to 0$

$\Rightarrow a_n \to x_0 \underset{\text{dall'ipotesi}}{\Rightarrow} f(a_n) \to \ell$

Questo è assurdo perché $f(a_n) \notin V$ intorno di l. ↯

□

Limiti di funzioni elementari

Potenze $f(x) = x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (x > 0)$

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

Dim sia $a_n \to +\infty \implies (a_n^\alpha) \to \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$

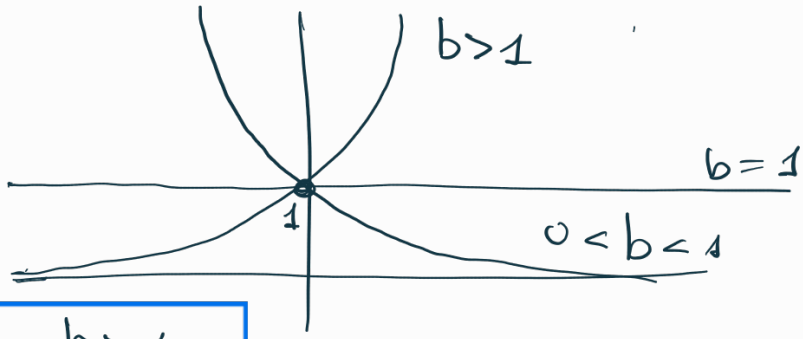
già provato per le succ^ni

$\implies$ teor. ponte $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} \\ \text{idem} \end{cases}$ □

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \qquad x_0 \in (0, +\infty)$$

Limiti di esponenziali $f(x) = b^x$ $(b > 0)$

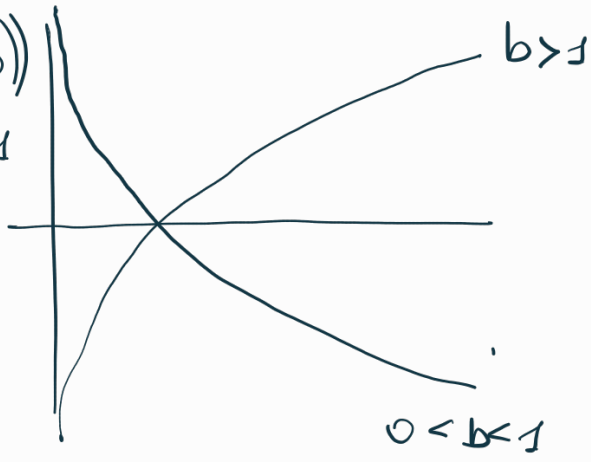


$$\lim_{x \to +\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ 1 & \text{se } b = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} b^x = \begin{cases} 0 & \text{se } b > 1 \\ 1 & \text{se } b = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} b^x = b^{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Logaritmi $y = \log_b x$ $(x \in (0, +\infty))$ $b > 0, b \neq 1$



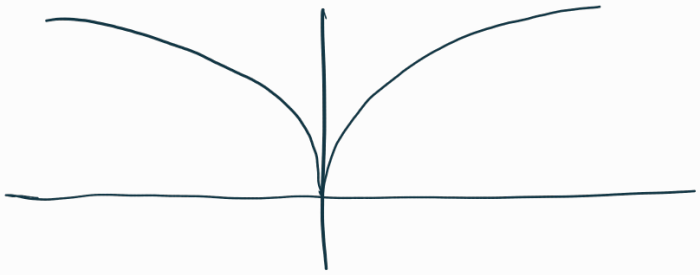
$$\lim_{x \to +\infty} \log_b x = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_b x = \begin{cases} -\infty & \text{se } b > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} \log_b x = \log_b x_0 \quad \forall x_0 \in (0, +\infty) \quad \forall b > 0, b \neq 1$$

Per le potenze x^α, per alcuni esponenti razionali i limiti si possono estendere anche a $x < 0$.

$$\lim_{x \to -\infty} x^{4/5} = +\infty$$
$$x^{4/5} = \sqrt[5]{x^4}$$

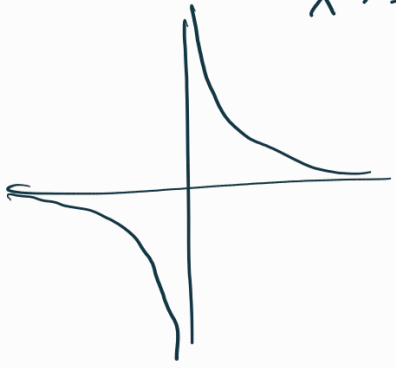


$$\lim_{x \to -3} x^{4/5} = (-3)^{4/5} = 3^{4/5}$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^{-3/5} = 0^-$$

$$x^{-3/5} = \frac{1}{x^{3/5}}$$

$$\lim_{x \to 0^-} x^{-3/5} = -\infty$$



Limiti di funzioni trigonometriche

$\lim_{x \to \pm\infty} \sin x \quad \nexists$ (già visto)

$\lim_{x \to \pm\infty} \cos x \quad \nexists$

$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$ (già visto)

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Dim $0 \leq |\sin x - \sin x_0| =$

Formule di prostaferesi: $\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}$

$$= 2 \left| \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \right| \left| \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \frac{|x - x_0|}{2} \to 0$$

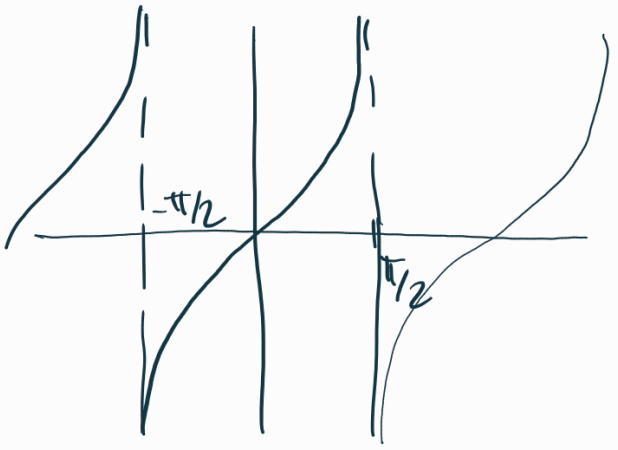
$|\sin t| \leq |t| \ \forall t$ $\quad \frac{|x - x_0|}{2}$ $\quad 1$

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \lim_{x \to x_0} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x_0$$

$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$



$\lim_{x \to +\infty \atop -\infty} \operatorname{tg} x \quad \nexists$ con il teorema ponte.

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{\cos x} \simeq \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0 \qquad x_0 \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$$

($\sin x \to 1$, $\cos x \to 0^+$)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x^3 \sin x}}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{|x| \sqrt{1 + 2x \sin x}}{x} =$$

($\sqrt{1 + 2x \sin x} \to 1$)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \quad \nexists$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 2x^3 \sin x}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \quad " \quad " \quad = -1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = \lim_{y \to 0} e^y = 1$$

($1/x \to 0$, $\frac{1}{x} = y \to 0$)

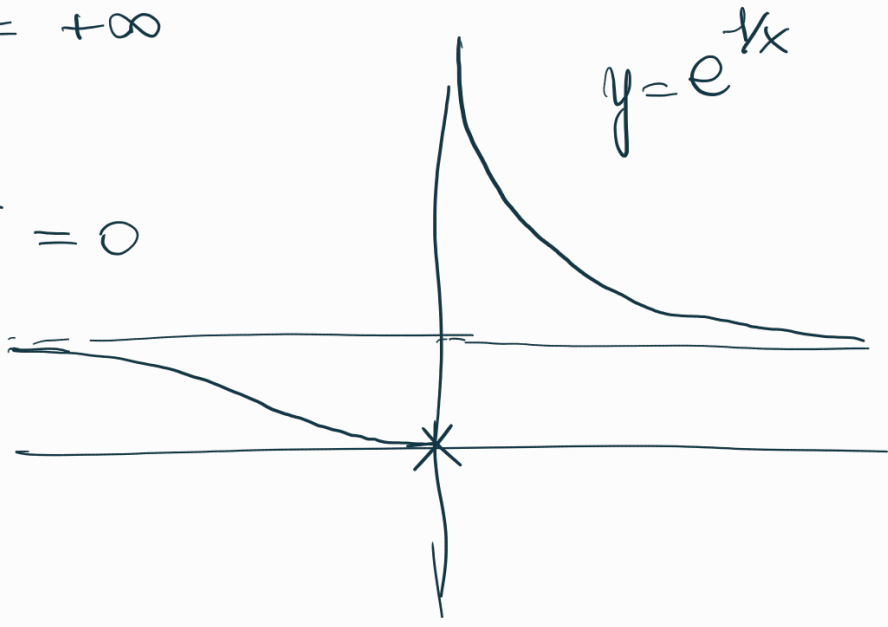
$\lim_{x \to 0} e^{1/x} \quad \nexists$ perché (vediamo) è diverso per $x \to 0^+$, $x \to 0^-$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$$

$y = \frac{1}{x} \to +\infty$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$$

$y = \frac{1}{x} \to -\infty$



$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{\pi x^4 - 3x}{x^3 \log(1+e^{2x})}\right) = +\infty.$$

πx^4

$\frac{\pi}{2}^-$

$$\frac{\pi x^4 - 3x}{x^3 \log(1+e^{2x})} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \to \frac{\pi}{2}$$ devo capire se è $\frac{\pi}{2}^+$ o $\frac{\pi}{2}^-$

$2x^4$

$$\log(1+e^{2x}) = \log\left(e^{2x}(1+o(1))\right) = \log(e^{2x}) + \log(1+o(1)) =$$

$\log(e^{2x}) = 2x$ $\quad$ $\log(1+o(1)) = o(1)$

$$= 2x(1+o(1)) \sim 2x$$

$< \pi x^4$

$$\frac{\pi x^4 - 3x}{x^3 \log(1+e^{2x})} < \frac{\pi x^4}{2x^4} = \frac{\pi}{2}$$

quindi

$$\frac{\pi x^4 - 3x}{x^3 \log(1+e^{2x})} \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$$

$x^3 \log(e^{2x}) = 2x^4$

CONFRONTO TRA INFINITI

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{b^x} = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{dove } b>1$$

il limite è banale per $\alpha \leq 0$: viene 0

Dim teor ponte: se $a_n \to +\infty$, allora $\frac{(a_n)^\alpha}{b^{a_n}} \to 0$ (fatto!)

e quindi $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{b^x} = 0$ □

Diremo che (b^x per $x\to+\infty$) è un infinito di ordine superiore rispetto a x^α $\forall \alpha > 0$ $\quad x^\alpha = o(b^x)$ per $x\to+\infty$

DEF Date due funzioni $f(x), g(x)$ t.c. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, diremo che

$f(x)$ è un infinito di ordine superiore risp. a $g(x)$ per $x\to x_0$ se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0, \text{ ossia } \lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$$

($g(x) = o(f(x))$ per $x\to x_0$)

Esempio Per $x\to-\infty$, x^3 è infinito di ordine superiore risp a x^2.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad (x^2 = o(x^3) \text{ per } x\to-\infty)$$

Per $x\to0^+$, $\frac{1}{x^3}$ è un infinito di ordine superiore risp. a $\frac{1}{x^2}$

$$\frac{(1/x^3)}{(1/x^2)} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty \qquad \left(\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^3}\right) \text{ per } x\to0^+\right)$$

Conseguenza: se $x \to 0^+$

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x^3}$$

$$\| $$

$$\frac{1}{x^3}\left(1 + \underset{\downarrow}{x}\right) \sim \frac{1}{x^3}$$

$$0$$

DEF Siano $f(x), g(x)$ def$^{te} \neq 0$ per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$

Scriveremo che $g(x) = o(f(x))$ per $x \to x_0$

se $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, cioè $\lim_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$

Quindi $g(x) = o(1)$ per $x \to x_0$ significa $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

$x^2 = o(x^3)$ per $x \to +\infty$

ma $x^3 = o(x^2)$ $x \to 0$

$$\frac{x^3}{x^2} = x \to 0 \qquad x \to 0$$

Conseguenza:

Se $x \to +\infty$ $\quad x^2 + x^3 \sim x^3$

$x \to 0$ $\quad x^2 + x^3 \sim x^2$

$$\| $$

$$x^2(1+x) \sim$$

$$\downarrow$$

$$1$$

Questo si generalizza così:

se $g(x) = o(f(x))$ per $x \to x_0$, allora

$$g(x) + f(x) \sim f(x) \quad \text{per} \quad x \to x_0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{b^x}_{\to 0} \cdot \underbrace{|x|^\alpha}_{\to +\infty} = \lim_{t \to +\infty} b^{-t} t^\alpha = \qquad \forall b > 1 \quad \forall \alpha > 0$$

$t = -x \to +\infty$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{t^\alpha}{b^t} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} b^x |x|^\alpha = 0 \qquad \forall b > 1 \quad \forall \alpha > 0$$