

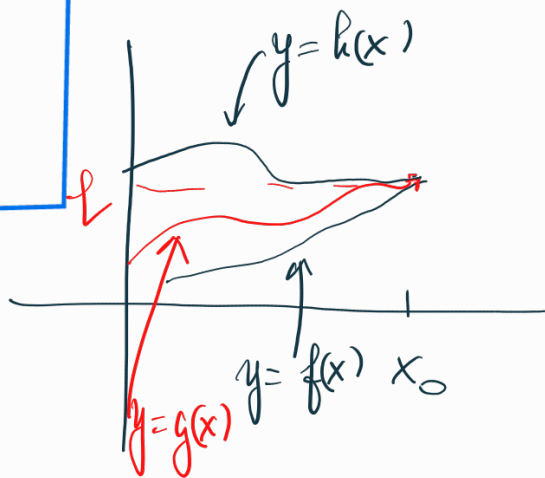
THM. dei Carabinieri

Siano $f, g, h: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ pto di accum. di X
Supponiamo

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ def}^{\text{te}} \text{ per } x \rightarrow x_0.$$

Allora, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$, si ha anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l.$$



Dim. come nel caso delle successioni.

OSS. Se $l = +\infty$ opp. $l = -\infty$, di carabinieri ne basta uno.

OSS Se $l \in \mathbb{R}$, si ha.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - l| = 0$$

Infatti scrivendo la def^{ne} di limite, si ottiene la stessa cosa.

Quindi per provare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, basta trovare un carabiniere per il valore assoluto

$$0 \leq |f(x) - l| \leq h(x)$$

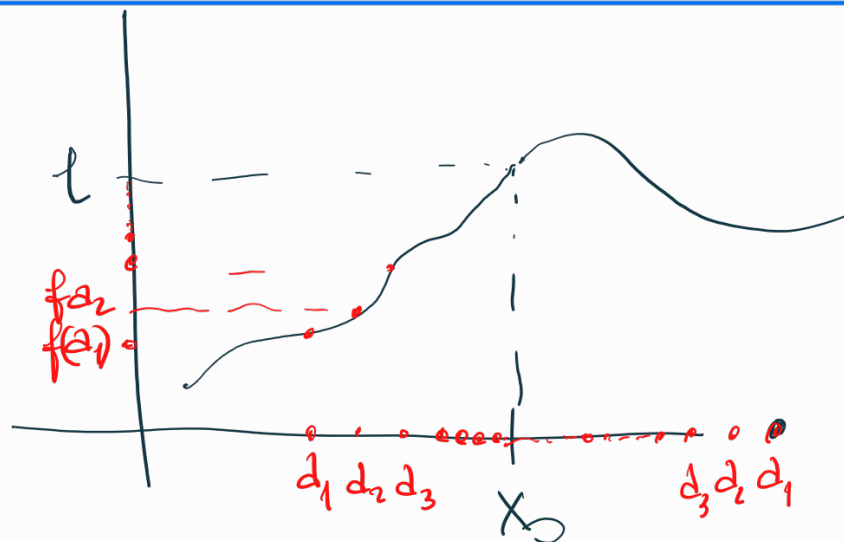
$\downarrow$
0

TEOREMA "ponte" tra limiti di successioni e di funzioni

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $l, x_0 \in \mathbb{R}^*$, x_0 pto di accum di X .

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall \text{ succ}^n \{a_n\} \text{ a valori in } X \setminus \{x_0\} \\ \text{t.c. } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0 \text{ si ha } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l.$$

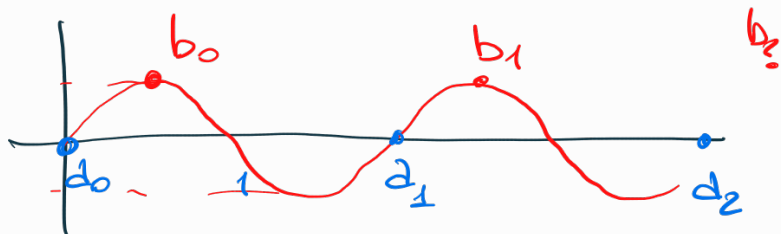


Applicazione:

per dimostrare che non esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, basta trovare due succ.ⁿ $a_n, b_n \rightarrow x_0$ t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$

Applicazione del teorema ponte alla non esistenza dei limiti.

$$\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$$



Se, per assurdo, il limite esistesse e fosse pari a l , allora per il teor. ponte ($\Rightarrow$), per ogni succ.ⁿ $a_n \rightarrow +\infty$ dovrei avere $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(a_n) = l$

Troverò due succ.ⁿ $\{a_n\}, \{b_n\}$ t.c. $a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow +\infty$ ma i limiti di $\sin(a_n)$ e $\sin(b_n)$ sono diversi.

$$\text{Prendo } a_n = 2\pi n \rightarrow +\infty, \sin a_n = \sin(2\pi n) = 0 \rightarrow 0$$

$$b_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \rightarrow +\infty, \sin b_n = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow 1$$

$$f(x) = \cos \frac{1}{x}$$



Voglio provare che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$ non esiste.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \Big|_{(0, +\infty)}$$

Per provare che il limite non esiste, troverò due successi $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ t.c. $a_n \rightarrow 0^+$, $b_n \rightarrow 0^+$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{a_n} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{b_n}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi n} \rightarrow 0^+, \quad \cos \frac{1}{a_n} = \cos(2\pi n) = 1 \rightarrow 1$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \rightarrow 0^+, \quad \cos\left(\frac{1}{b_n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 0 \rightarrow 0$$

Usando il teor. dei carabinieri, voglio provare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$0 \leq |\sin x| \leq |x| \quad \Rightarrow \quad |\sin x| \rightarrow 0 \Rightarrow \sin x \rightarrow 0$$

Carabinieri

↑
lo proviamo dopo

Vogliamo provare che $|\sin x| \stackrel{?}{\leq} |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

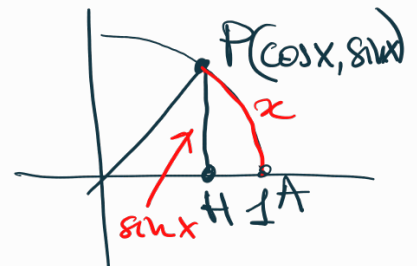
Le funzioni sono pari $\Rightarrow$ basta provarla per $x \geq 0 \Rightarrow$ tolgo $|x|$.

$$|\sin x| \stackrel{?}{\leq} x \quad \forall x \in [0, +\infty)$$

ovvio se $x \geq 1$

$$|\sin x| \stackrel{?}{\leq} x \quad \forall x \in [0, 1]$$

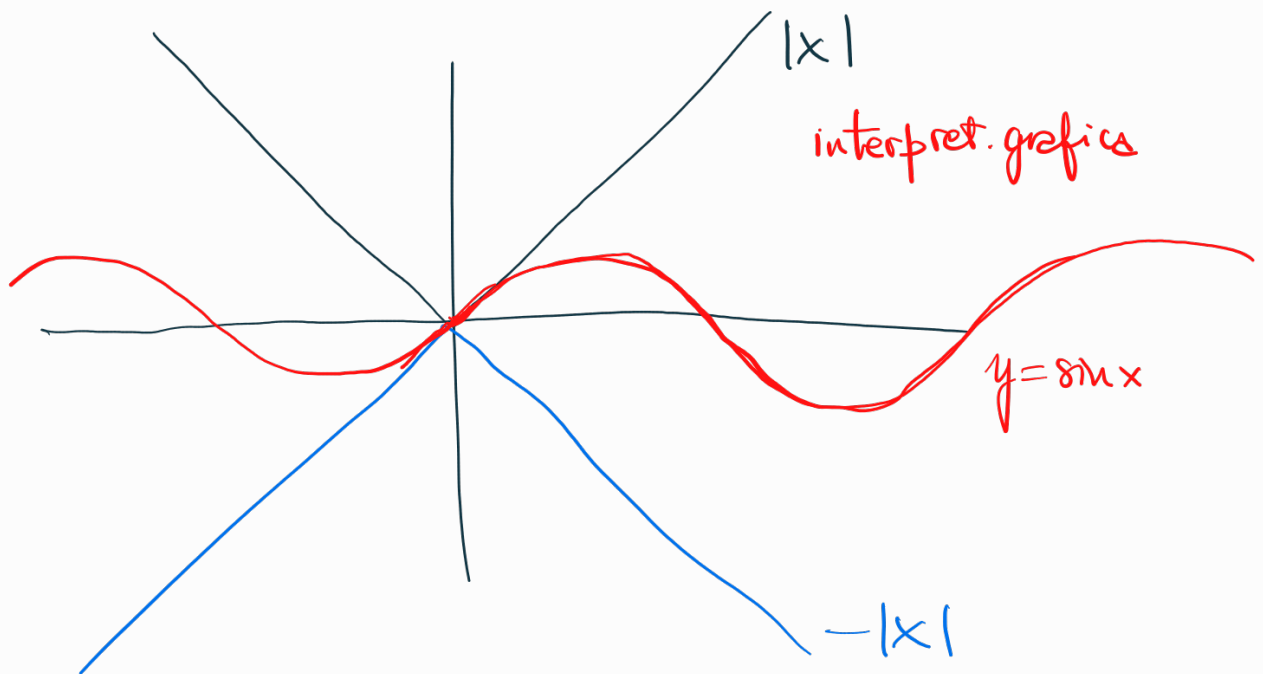
siamo nel primo
quadrante $\Rightarrow$ tolgo il modulo



$$\sin x \stackrel{?}{\leq} x \quad \forall x \in [0, 1]$$

Questo è vero ($\rightarrow$ figura) perché il segmento $\overline{PH}$ ha lunghezza inferiore rispetto all'arco $\widehat{PA}$

$$|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -|x| \leq \sin x \leq |x|$$



TEOREMA (aritmetica dei limiti)

$f, g: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ pto di accum. di X

Supponiamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$.

Allora:

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha l + \beta m \quad (\text{linearità del limite})$$

(oss. se $\alpha = \beta = 1$ è il limite della somma)

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = lm$

3) Se $m \neq 0$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

$\neq 0$ defte per la
perm. della div.

Dim. la 1) con il teor. ponte.

Hyp $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$

Per il teor. ponte ($\Rightarrow$) $\forall$ sucche $\{a_n\}$ di valori in $X \setminus \{x_0\}$

t.c. $a_n \rightarrow x_0$ si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(a_n) = m$$

Per il teor. dell'aritmetica dei limiti di successione

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha f(a_n) + \beta g(a_n)) = \alpha l + \beta m$$

per ogni sucche $\{a_n\}$ t.c. ---

Uso il teor. ponte ($\Leftarrow$) per la funzione $\alpha f(x) + \beta g(x)$

e quindi $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha l + \beta m$

Le affermazioni (2) e (3) si provano similmente $\square$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x}{x - x^3 + 1} = \frac{15}{-23} = -\frac{15}{23}$$

Num. $\xrightarrow{-23} x \rightarrow 3 \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 \rightarrow 3 \cdot 3 = 9 \\ 2x \rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \end{array} \mid \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 + 2x \rightarrow 9 + 6 = 15 \end{array}$

Den. $x \rightarrow 3 \Rightarrow x^3 \rightarrow 27 \Rightarrow x - x^3 + 1 \rightarrow 3 - 27 + 1 = -23$

L'aritmetica dei limiti si può estendere come per le succ^m:

Se per $x \rightarrow x_0$ $\begin{array}{l} f(x) \rightarrow +\infty \\ g(x) \rightarrow m \in \mathbb{R} \end{array} \mid \Rightarrow f(x) + g(x) \rightarrow +\infty$

si scrive $" +\infty + m = +\infty "$ $\forall m \in \mathbb{R}$

$" +\infty + \infty = +\infty "$

$" -\infty + m = -\infty "$ $\forall m \in \mathbb{R}$

$" -\infty - \infty = -\infty "$

$" -\infty + \infty "$ forma indeterminata.

In realtà si può generalizzare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \left| \begin{array}{l} g(x) \text{ limitata inferiormente} \\ \text{defte per } x \rightarrow x_0 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

($\exists$ U interval di $\mathbb{R}$
in cui $g(x) \geq m \ \forall x \in U \cap X \text{ (ed)}$)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - 5 \sinh x) = +\infty$$

$$-x - 5 \sin x \geq -x - 5 \rightarrow +\infty$$

Regole per il prodotto

$$^u (+\infty) \cdot m = \begin{cases} +\infty & \text{se } m > 0 \\ -\infty & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

$$u(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty^u$$

$$^4 (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty''$$

$${}^u(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty^u$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \rightarrow +\infty \\ \text{for } x \rightarrow x_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{if } g(x) \geq c > 0 \text{ def }^{\text{te}} \\ \text{for } x \rightarrow x_0 \end{array}$$

Per es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (2 \sin x - 3) = -\infty$

" $\pm\infty \cdot 0$ " è una forma indeterminata

$$\frac{l}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{se } l > 0 \\ -\infty & \text{se } l < 0 \end{cases}$$

Cosa vuol dire

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m^+?$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \\ g(x) > m \text{ def. }^{\text{te}} \text{ per } x \rightarrow x_0 \end{cases}$$

cioè $\forall \varepsilon > 0 \exists U$ intorno di x_0

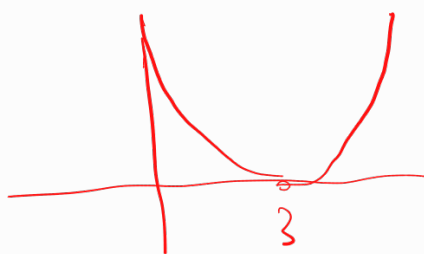
$$\text{t.c. } m < g(x) < m + \varepsilon \quad \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$$

Restano le consuete f.i.

$$+\infty - \infty, \quad \pm\infty \cdot 0, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

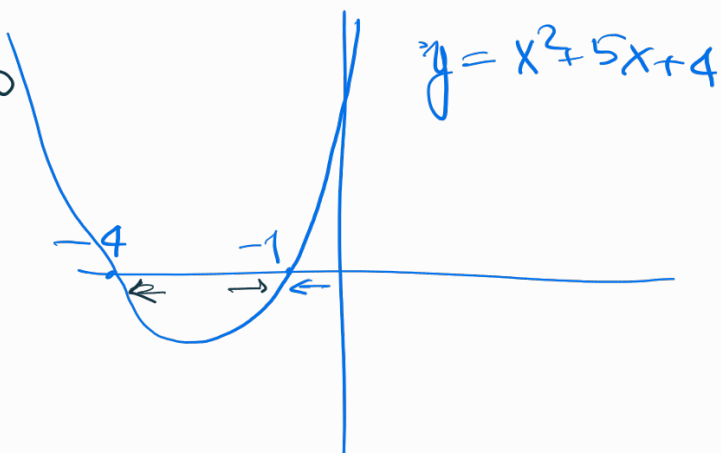
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x^2}{(x-3)^2} \xrightarrow{-8} = -\infty$$

$\downarrow$
 0^+



$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2+5x+4} = +\infty$$

$\downarrow$
 0^+



$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$x = -4, \quad x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 + 5x + 4} = \left(\frac{1}{0^-} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{1}{x^2 + 5x + 4} = \left(\frac{1}{0^-} \right) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 + 2x^4 + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4} \right) = \\ &\quad \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -\infty & +\infty & -\infty \end{array} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 (3 + o(1)) = -\infty \end{aligned}$$

DEF Diremo che $f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^*$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 + 2x^4 + x}{x^5 + 7x^2 + 1} &= \left(\frac{-\infty}{-\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^5} (3 + o(1))}{\cancel{x^5} (1 + o(1))} = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 + 2x^4 + x}{-x^4 + 7x^2 + 1} &= \left(\frac{-\infty}{-\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^5} (3 + o(1))}{\cancel{x^4} (-1 + o(1))} = +\infty \end{aligned}$$

$\begin{array}{ccc} \swarrow & & \downarrow \\ -\infty & & -3 \end{array}$

DEF Scriviamo che $f(x)$ e $g(x)$ sono asintoticamente equivalenti per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^*$, in simboli:

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \text{ cioè } f(x) = g(x)(1 + o(1)) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Quando posso sostituire una funzione con una asintoticamente equivalente?

(Sì)

- nei fattori di un prodotto
- nel numeratore/denominatore di una frazione
- all'interno di potenze fissate.

(No)

- in somme/differenze
- all'interno di funzioni.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\underbrace{3x^5 + 2x^4 + x}_{\sim 3x^5}}{\underbrace{-x^4 + 7x^2 + x}_{\sim -x^4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\underbrace{3x^5}_{(1)}}{\underbrace{-x^4}_{-3x}} = +\infty$$