

$$\sqrt{x^2+4} = 2x \Rightarrow x^2+4 = 4x^2$$

$\Downarrow$

$$x^2 = \frac{4}{3} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{OK} \\ x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{non accett.} \end{cases}$$

In alternativa, quest'analisi si può fare prima.

$$\sqrt{x^2+4} = 2x \iff x^2+4 = 4x^2$$

se entrambi i membri sono ≥ 0

$$\begin{cases} \cancel{x^2+4 \geq 0} \\ \cancel{2x \geq 0} \\ 3x^2 = 4 \end{cases}$$

Sempre vera

sol^{te} $\left(x = \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$\Downarrow$

$$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{2x+3} = \sqrt{4x^2-2x-6}$$

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 4x^2-2x-6 \geq 0 \\ 2x+3 = 4x^2-2x-6 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ (x \leq -1) \vee x \geq \frac{3}{2} \\ 4x^2-4x-9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(-\frac{3}{2} \leq x \leq -1\right) \vee \\ \left(x \geq \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} -1 \\ 3/2 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+36}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{2} = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{10}}{2} \text{ poco meno di } -1 \\ \frac{1+\sqrt{10}}{2} \text{ poco più di } 3 \end{cases}$$



Disegui della forma

$$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x)$$

("≤")

n pari

equivalente a un sistema:

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 & \text{per l'esistenza della radice} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q(x) > 0 & \text{segue dalla diseg}^{\text{ne}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(x) < Q(x)^n & \text{perché una volta che i due membri} \\ & \text{sono } \geq 0, \text{ posso quadrare} \\ & \text{senza aggiungere sol}^{\text{ni}} \end{cases}$$

Esempio

$$\sqrt{x^2 + 3x + 9} \leq x + 3$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 9 \geq 0 & \text{sempre vero} \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 36}}{2}$$

$$\Delta < 0$$

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \end{cases}$$

$$\cancel{x^2 + 3x + 9} \leq (x + 3)^2$$

$$\cancel{x^2 + 6x + 9}$$

$$\begin{cases} 3x \geq 0 \end{cases}$$

solⁿⁱ

$$x \geq 0$$

$$\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x)$$

n pari

Equivalente all'unione di due sistemi

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 & \text{(esistenza della radice)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q(x) < 0 \end{cases}$$

in questo caso
la diseg^{ne} è vera

$$\vee \begin{cases} P(x) \geq 0 & \text{implicita dalla} \\ & \text{terza} \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) \geq Q(x)^n \end{cases}$$

$$\sqrt{3(x+1)} \geq 2x-1$$

1° modo (come illustrato sopra)

$$\begin{cases} 3(x+1) \geq 0 \\ 2x-1 < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \cancel{3(x+1) \geq 0} \\ 2x-1 \geq 0 \\ 3(x+1) \geq (2x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluz. del 1° sistema

$$\boxed{-1 \leq x < \frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{3x+3} \geq \cancel{4x^2-4x+1} - \frac{1}{4} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$4x^2 - 7x - 2 \leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{8} =$$

$$= \frac{7 \pm 9}{8} = \begin{cases} -\frac{1}{4} \\ 2 \end{cases}$$

Soluzioni del 2° sist. 2

$$\boxed{\frac{1}{2} \leq x \leq 2}$$

Unione

Sol^{ne} della diseq.

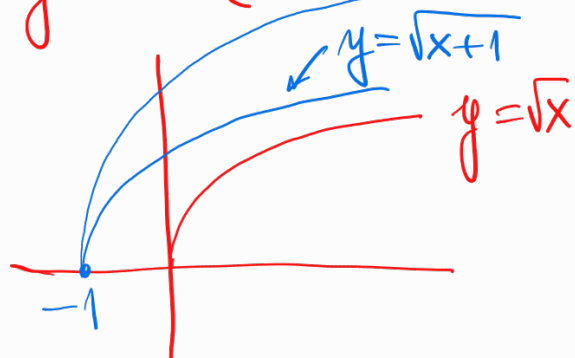
$$\boxed{-1 \leq x \leq 2}$$

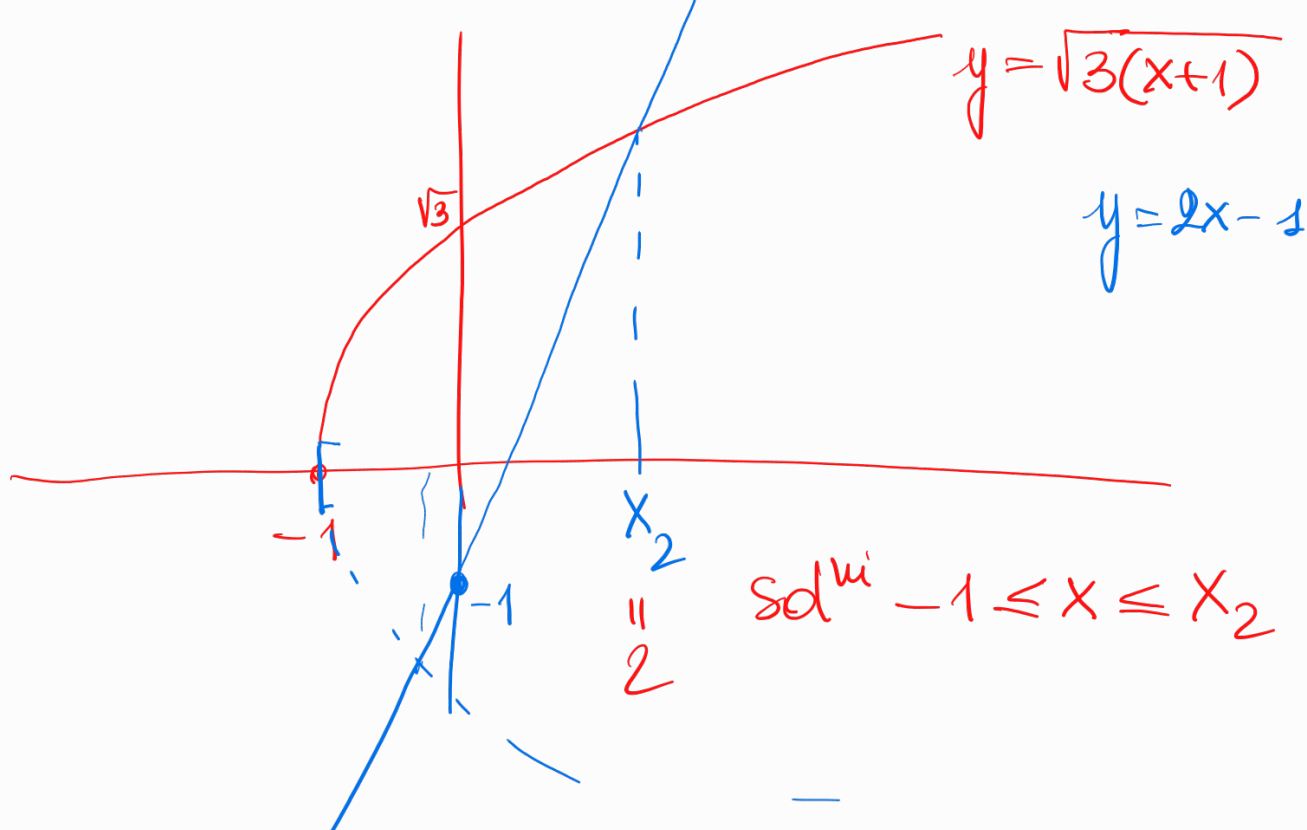
2° modo

$$\sqrt{3(x+1)} \geq 2x-1$$

risoluzione grafica

$$y = \sqrt{3(x+1)} = \sqrt{3} \sqrt{x+1}$$





x_2 è sol^ue di $\sqrt{3(x+1)} = 2x-1$

$$\Rightarrow 3x+3 = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$4x^2 - 7x - 2 = 0$$

~~$$x = -\frac{1}{4}$$~~
$$x = 2$$

3° modo

$$\sqrt{3(x+1)} \geq 2x-1$$

$x \geq -1$ studio l'eq^ue.

$$\sqrt{3(x+1)} = 2x-1 \quad \text{1' unica sol}^{\text{u}} \text{ è } x=2$$

La diseq^ue può "cambiare di orientazione" solo in $x=2$

Quindi c'è sempre lo stesso segno ($<$ oppure $>$) in $(-1, 2)$ e in $(2, +\infty)$

Prendo $x=0 \Rightarrow \sqrt{3} > -1 \Rightarrow$ la diseq^ue è vera
tra -1 e 2 .

$$x = 3$$

$$\sqrt{x} < 5$$

la diseg^{ne} è
falsa per $x > 2$.