

Limiti di funzioni

$$f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}^*, l \in \mathbb{R}^*$$

scriveremo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ se

- $(x_0 \text{ pto di accum. di } X)$
- $\forall V$ intorno di l si ha $f(x) \in V$ def^{te} per $x \rightarrow x_0$
cioè

$\forall V$ intorno di $l \exists U$ intorno di x_0 t.c.
 $f(x) \in V \quad \forall x \in X \cap U \setminus \{x_0\}$.

1° caso: $l \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$.

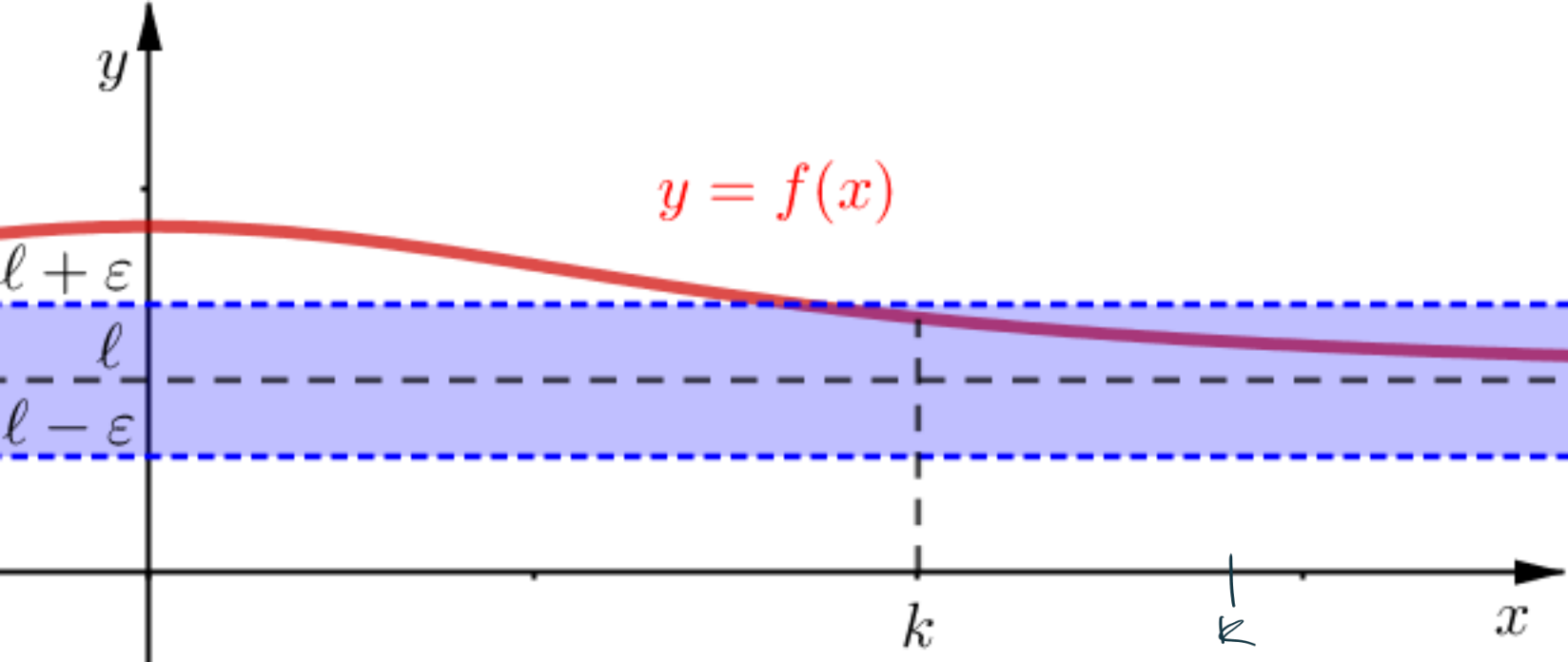
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| < \varepsilon \\ \forall x \in X \text{ verificante } 0 < |x - x_0| < \delta$$

2° caso $x_0 = +\infty$; $l \in \mathbb{R}$ (contiene i limiti di successi convergenti)

Intorni di l : $V = B_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon) = \{y: |y - l| < \varepsilon\}$
($\varepsilon > 0$)

Intorno di $+\infty$: $U = (k, +\infty)$ ($k \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f(x) - l| < \varepsilon \\ \forall x \in X \text{ verificante } x > k.$$



Esempio: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-6}} = 0$ $l=0, x_0=+\infty$

Fisso $\varepsilon > 0$, cerco k t.c. $\left| \frac{1}{\sqrt{x-6}} - 0 \right| < \varepsilon$

$\forall x > 6$ verificante $x > k$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x-6}} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-6}} < \varepsilon \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{x-6}}_0 > \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_0$$

$$\Leftrightarrow x-6 > \frac{1}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow x > \underbrace{6 + \frac{1}{\varepsilon^2}}_{=: k}$$

3) $x_0 \in \mathbb{R} \quad l = -\infty$

Intorni di l : $V = (-\infty, M)$ $(M \in \mathbb{R})$

Intorni di x_0 : $U = \{x : |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$

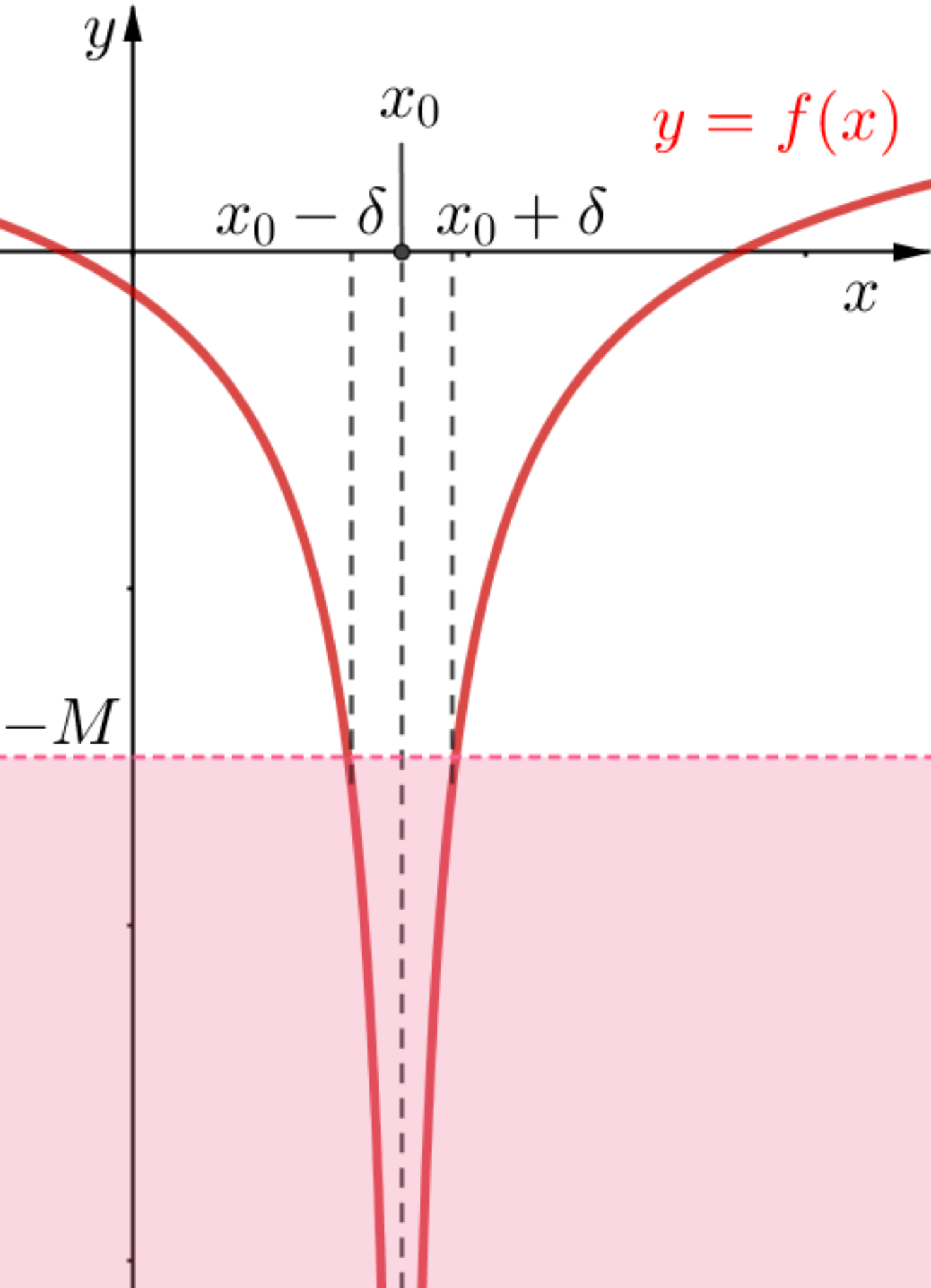
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) < M$
 $\forall x \in X$ verificante $0 < |x - x_0| < \delta$

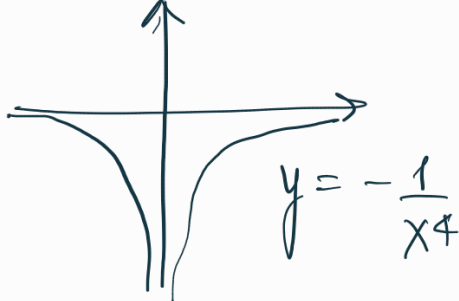
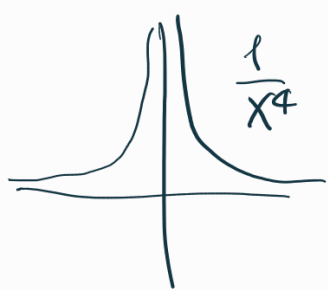
In realtà basta verificarlo $\forall M < 0$, che indico con $-M$, con $M > 0$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) < -M$
 $\forall x \in X$ verificante $0 < |x - x_0| < \delta$.

Esempio: verifichiamo che

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^4} \right) = -\infty$





$\forall M > 0$ cerco $\delta > 0$ t.c.

$$-\frac{1}{x^4} < -M$$

$\forall x$ verificante

$$0 < |x - 0| < \delta$$

$$-\frac{1}{x^4} < -M \Leftrightarrow \frac{1}{x^4} > M \Leftrightarrow x^4 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow$$

$x \neq 0$

$$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{M}} =: \delta$$

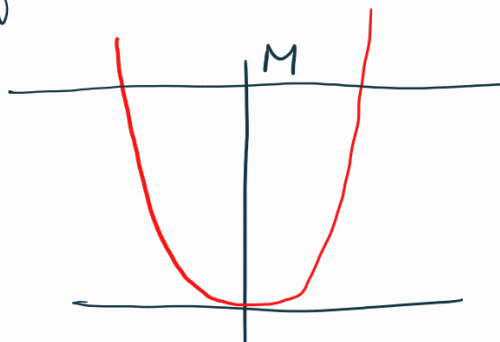
$0 <$

Caso 4 $x_0 = -\infty$, $l = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists k \in \mathbb{R}: f(x) > M$$

$$\forall x \in X \text{ verificante } x < k$$

Esempio $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$



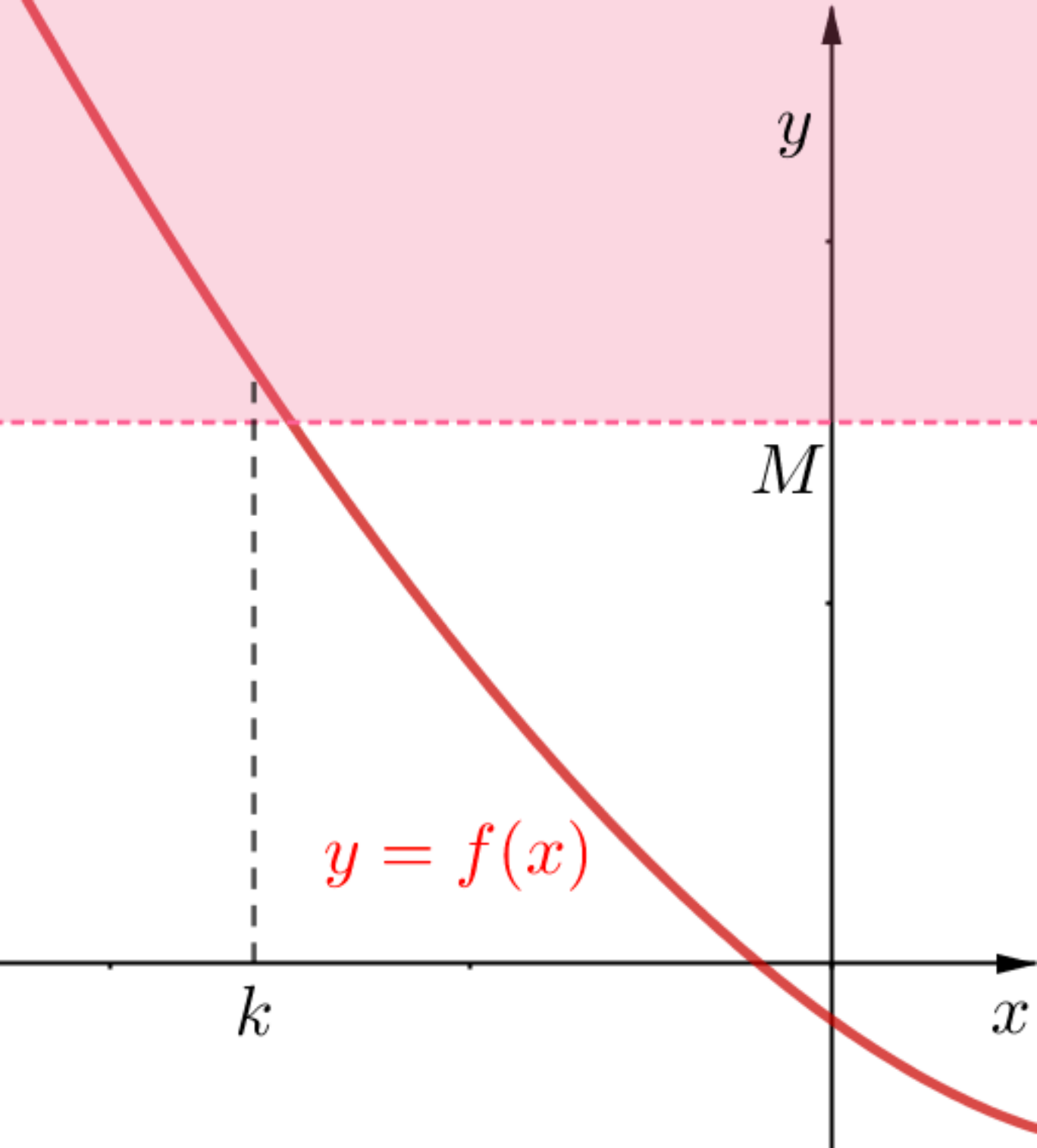
Verifica:

Fisso $M > 0$, cerco k t.c.

$$\text{se } x < k \text{ allora } x^4 > M$$

$$x^4 > M \Leftrightarrow x < -\sqrt[4]{M} \vee x > \sqrt[4]{M} \Leftrightarrow x < -\sqrt[4]{M} =: k$$

Esercizio: scrivere le altre 5 definizioni di limite.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$$

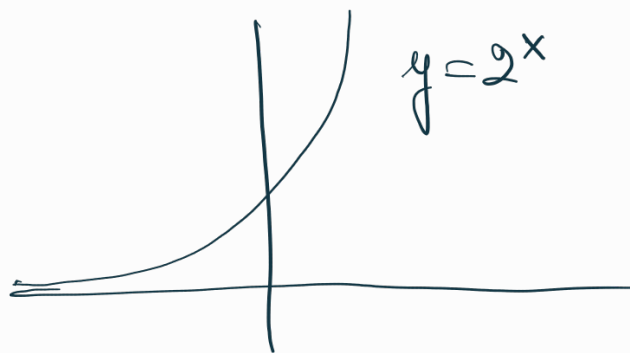
Significa:

$$\forall M > 0 \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c.}$$

$$2^x > M \quad \forall x > k.$$

Infatti:

$$2^x > M \Leftrightarrow x > \log_2 M =: k$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

significa

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } 2^x < \varepsilon \quad \forall x < k$$

$$2^x < \varepsilon \Leftrightarrow x < \log_2 \varepsilon =: k$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x+1} = \frac{3}{4}$$

significa

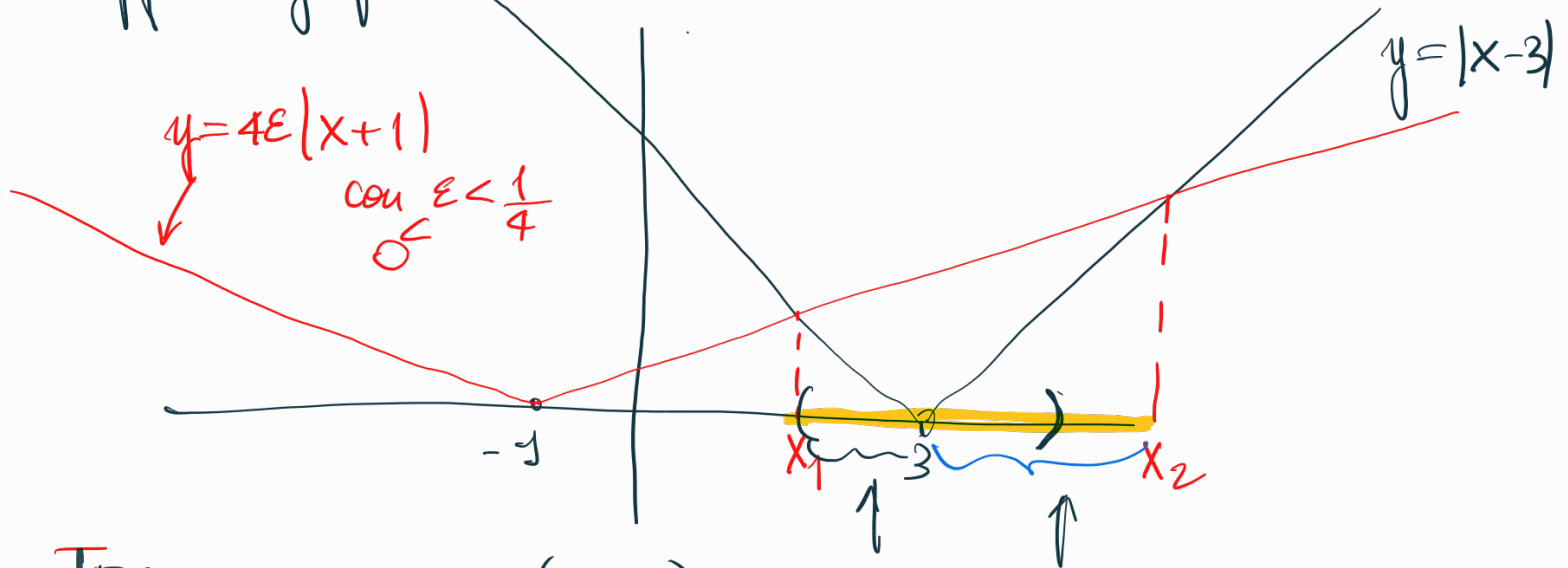
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \left| \frac{x}{x+1} - \frac{3}{4} \right| < \varepsilon$$

$$\forall x \neq -1 \text{ verificante } 0 < |x-3| < \delta$$

$$\left| \frac{x}{x+1} - \frac{3}{4} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{4x-3x-3}{4(x+1)} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x-3|}{4|x+1|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < 4\varepsilon |x+1|$$

L'ultima diseg^{na} si può risolvere "sferrando i moduli" oppure graficamente.



Trovo x_1 : $4\epsilon(x+1) = 3-x$

$$x(4\epsilon+1) = 4\epsilon+3$$

$$x_1 = \frac{3+4\epsilon}{1+4\epsilon} < 3$$

x_2 : $4\epsilon(x+1) = x-3$

$$x(-1-4\epsilon) = 3+4\epsilon$$

$$x_2 = \frac{3+4\epsilon}{-1-4\epsilon} > 3$$

Prendo $\delta = \min\{x_2-3, 3-x_1\} = 3-x_1 > 0$

Altro modo (più sintetico, meno calcoli)

Fissato $\epsilon > 0$ cerco $\delta > 0$ t.c. $\left| \frac{x}{x+1} - \frac{3}{4} \right| < \epsilon$

$\forall \delta$ verificante $0 < |x-3| < \delta$

$$\left| \frac{x}{x+1} - \frac{3}{4} \right| < \varepsilon \iff \frac{|x-3|}{4|x+1|} < \varepsilon \iff |x-3| < \delta = \min\{1, 12\varepsilon\}$$

OSS se $|x-3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow 3 < x+1 < 5$

$$\Rightarrow 3 < |x+1| < 5 \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{|x+1|} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{|x-3|}{4|x+1|} < \frac{|x-3|}{4 \cdot 3} < \varepsilon$$

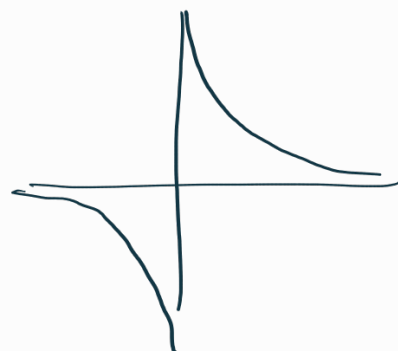
$$|x-3| < 12\varepsilon$$

Scelgo $\delta = \min\{1, 12\varepsilon\}$

se $|x-3| < \delta \Rightarrow |x-3| < 1$
 $|x-3| < 12\varepsilon$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \neq$$

Vorrei descrivere la situazione suggerita dal grafico.



Se $x \rightarrow 0$ "da numeri positivi" il limite vale $+\infty$

Se $x \rightarrow 0$ "da "negativi" " " " $-\infty$

cioè $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $E \subset X$.

Definiamo $f|_E(x) = f(x)$ se $x \in E$.

$f|_E: E \rightarrow \mathbb{R}$ "restrizione di f ad E "

DEF Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Diremo che $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ (limite da destra)

se la restrizione $f|_{X \cap (x_0, +\infty)}$ verifica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{X \cap (x_0, +\infty)}(x) = l, \text{ cioè}$$

$\forall U$ intorno di $l \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \in U$

$\forall x \in X$ verificante $\underbrace{x_0 < x < x_0 + \delta}_{\text{intorno destro di } x_0}$

Diremo che $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ (limite da sinistra) se

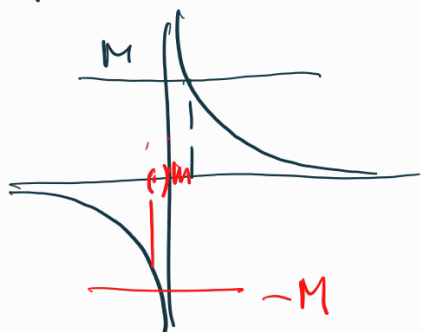
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{X \cap (-\infty, x_0)}(x) = l, \text{ cioè}$$

$\forall U$ intorno di $l \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \in U \quad \forall x \in X$ verificante $x_0 - \delta < x < x_0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$\forall M > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\frac{1}{x} > M \quad \forall x$ verificante $0 < x < \delta$

$$\frac{1}{x} > M \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{M} =: \delta$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Verifica

$\forall M > 0$ cerco $\delta > 0$ t.c.

$$\frac{1}{x} < -M$$

$\forall x$ t.c.

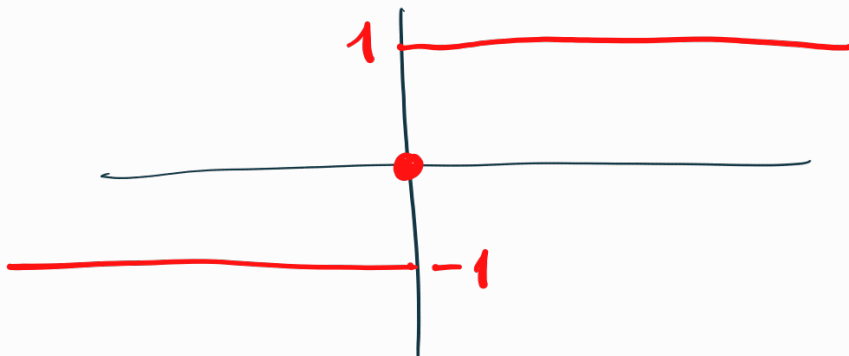
$$-\delta < x < 0$$

$$\frac{1}{x} < -M \Leftrightarrow -\frac{1}{M} < x < 0$$

δ

def la funzione $\text{sign } x$

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sign } x \nexists,$$

$$\text{ma } \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sign } x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sign } x = -1$$

OSS Per considerare $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, x_0 deve essere

pto di accum. di $X \cap (x_0, +\infty)$

cioè pto di accum. da destra di x

Per considerare $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, x_0 deve essere punto di accum. di $X \cap (-\infty, x_0)$, cioè punto di accum. da sinistra di X .

OSS se x_0 è pto di accum di $X = \text{dom } f$.
sia da destra che da sinistra, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

Proprietà dei limiti

TEOREMA (unicità del limite)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, se esiste, è unico

TEOREMA (permanenza del segno)

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in (0, +\infty]$, allora

$f(x) > 0$ def^{te} per $x \rightarrow x_0$,

cioè $\exists$ $\mathcal{U}$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in \mathcal{U} \cap X \setminus \{x_0\}$
si ha $f(x) > 0$

(dim: basta prendere un intorno $\mathcal{U}$ di l fatto da numeri > 0)

Viene enunciato anche così:

TEOREMA

se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

$f(x)$ def^{te} ≤ 0 per $x \rightarrow x_0$

$$\Rightarrow l \leq 0$$

Generalizzazione:

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, allora:

- se $m < l$, allora $f(x) > m$ def^{te} per $x \rightarrow x_0$
- se $m > l$, allora $f(x) < m$ " " " "